



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

ESTUDIO DEL EFECTO SOMMERFELD PARA EL CASO DE MATERIA OSCURA FERMIÓNICA

Carlos Enmanuel Soto López

Asesorado por Dra. María Eugenia Cabrera Catalán

Guatemala, Enero de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**ESTUDIO DEL EFECTO SOMMERFELD PARA EL
CASO DE MATERIA OSCURA FERMIÓNICA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

CARLOS ENMANUEL SOTO LÓPEZ
ASESORADO POR DRA. MARÍA EUGENIA CABRERA CATALÁN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, ENERO DE 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anleu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

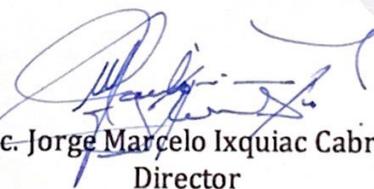
EXAMINADOR Dr. Juan Adolfo Ponciano Castellanos
EXAMINADOR Dr. José Rodrigo Sacahui Reyes
EXAMINADOR Dr. Angel Giovanni Ramírez García

Ref. D.DTG. 001-2021
Guatemala 13 de enero de 2021

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: **“ESTUDIO DEL EFECTO SOMMERFELD PARA EL CASO DE MATERIA OSCURA FERMIÓNICA”** presentado por el estudiante universitario **Carlos Enmanuel Soto López**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis papás por brindarme su apoyo en mis estudios, a mi hermano por apoyarme cuando mis papás ya no pudieron. Agradezco a mis profesores, a mi asesora de tesis por guíarme, aconsejarme y explicarme siempre que tenía dudas y a mis amigos de la universidad que siempre me inspiraron a seguir estudiando.

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN	1
2. Sobre la Materia Oscura	3
2.1. Algunas evidencias de la existencia de la materia oscura	3
2.1.1. Lentes gravitacionales	3
2.1.2. Velocidad de rotación en las galaxias	4
2.1.3. Anisotropías en el fondo cósmico de microondas	6
2.2. Algunos candidatos para materia oscura	8
2.2.1. Partículas WIMP	8
2.2.2. Partículas autointeractuantes	9
2.2.3. Neutrino Estéril	9
2.3. Detectando materia oscura	10
3. Sobre el Efecto Sommerfeld	11
3.1. Un experimento prometedor	11
3.2. Efecto Sommerfeld	12
4. Aniquilación de dos fermiones de materia oscura	15
4.1. Preliminares	15
4.1.1. Campos escalares	15
4.1.2. Campos fermiónicos	16
4.1.3. Amplitud de una interacción	19
4.1.4. Procesos de aniquilación	21
4.2. Cálculo de la amplitud	23
4.2.1. Encontrando H_I	23
4.2.2. Cálculos preliminares	25
4.2.3. Primer término de la amplitud	28
4.2.4. Segundo término de la amplitud	29

5. Análisis del Efecto Sommerfeld y limite no relativista	35
5.1. Análisis del efecto Sommerfeld	35
5.1.1. Cálculo del cuadrado de las amplitudes	35
5.1.2. Cálculo de $\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2$ y $\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2$	36
5.2. Límite no relativista	42
5.2.1. Teoría de perturbaciones no relativista	42
6. Análisis no relativista	47
6.1. Solución de la ecuación de Schrödinger	47
6.1.1. Parte radial de la ecuación de Schrödinger	50
6.1.1.1. Parte radial de la ecuación de Schrödinger con $V(r) =$ $\frac{\lambda}{r}e^{-m_\phi r}$	51
6.2. Resultados no relativistas	54
6.2.1. Solución numérica de la ecuación radial	54
6.2.2. Factor del efecto Sommerfeld	57
7. Conclusiones	61
8. Anexos	63
BIBLIOGRAFÍA	79

1. INTRODUCCIÓN

El efecto Sommerfeld se entenderá en este trabajo como el efecto producido en la sección eficaz de una interacción debido a la presencia de un potencial [14]. Para partículas moviéndose a velocidades pequeñas sucede un efecto no relativista, es decir, un efecto que ocurre a velocidades tales que c , la velocidad de la luz, puede aproximarse a infinito. El efecto es que la presencia de un potencial atractivo puede amplificar grandemente a la sección eficaz de la interacción. Debido a este efecto, estudiarlo se vuelve relevante al momento de estudiar cualquier proceso de interacción entre partículas moviéndose a velocidades pequeñas.

Uno de los procesos en los que resulta relevante el efecto Sommerfeld es en el estudio de la materia oscura, materia que no podemos ver pues no interactúa de forma electromagnética [15] pero observaciones parecen indicar que ocupa la mayor parte de la materia en el universo. Una de las evidencias para la existencia de la materia oscura se encuentra en observaciones del fondo cósmico de microondas, una ventana a etapas tempranas de la existencia del universo [18]. En estas observaciones se evidencian anisotropías. Con ayuda de simulaciones, estas anisotropías, ayudadas de un factor dominante de materia no relativista y presión despreciable, podrían explicar las grandes estructuras del universo que se tienen hoy en día [5]. Algunas simulaciones predicen grandes concentraciones de materia en los centros de los cúmulos de galaxias, sin embargo muchas de ellas parecen tener menor cantidad de galaxias que las predichas [21]. Un candidato de materia oscura que parece aliviar estos inconvenientes son las partículas WIMP autointeractuantes, partículas masivas que interactúan de forma débil con una sección eficaz de aniquilación mucho menor a la sección eficaz de dispersión [21][15].

Una forma con la que se espera detectar materia oscura es por medio de detección indirecta, detección de los productos del decaimiento de partículas de materia oscura [15]. Varios experimentos tales como el PAMELA [7], HEAT [4] y el ASM-01 [2] han detectado señales que podrían interpretarse como posibles aniquilaciones de partículas de materia oscura, sin embargo, para poder interpretarlo de esa forma

hay muchos obstáculos que superar. Uno de ellos es encontrar un mecanismo por medio del cual esta interacción se ve amplificada. Una propuesta es considerar estas partículas de materia oscura autointeractuantes moviéndose a velocidades pequeñas, por lo que su sección eficaz de aniquilación se vería amplificada por el efecto Sommerfeld [12].

Con este incentivo, estudio la dependencia que tiene el efecto Sommerfeld sobre la velocidad de dos partículas fermiónicas, tomando el papel de dos partículas de materia oscura, en una interacción que involucra la aniquilación de estas partículas. Para este propósito, empiezo estudiando la amplitud de un término de la interacción utilizando mecánica cuántica relativista, concluyendo que la amplificación de la interacción se ve incrementada para velocidades pequeñas y que, para velocidades grandes, el efecto Sommerfeld no depende de la velocidad. En caso relativista, al aproximar la interacción total utilizando los primeros términos de la expansión perturbativa, se requiere que los siguientes términos sean pequeños, pero para partículas moviéndose a velocidades pequeñas estos términos crecen, esto hace necesario estudiar este efecto de otra forma.

Para este propósito, vuelvo a estudiar la dependencia en la velocidad utilizando mecánica cuántica no relativista.

2. Sobre la Materia Oscura

Observaciones del universo parecen indicar que la materia bariónica ocupa al rededor del 5 % de la energía del universo, dejando alrededor de un 27 % en *materia oscura* y un 68 % en energía oscura [5]. En las siguientes secciones se describen cualitativamente algunas de las evidencias de la existencia de la *materia oscura* y posteriormente se enumeran algunas de las partículas candidatas a serlo. Finalmente se introduce brevemente las maneras en las que se está intentando detectar materia oscura.

2.1. Algunas evidencias de la existencia de la materia oscura

Existen muchos fenómenos observacionales en donde la materia que se puede observar parece no ser suficiente para explicarlos. A continuación se explican brevemente dos de estos fenómenos, así como un argumento que favorece la existencia de la materia oscura, basado en evidencias observacionales e ideas relacionadas con cosmología.

2.1.1. Lentes gravitacionales

La teoría de la relatividad general (GR por sus siglas en inglés) nos habla de cómo la distribución de energía y materia en el universo distorsiona la trayectoria que un objeto seguiría sin su influencia. Si un cometa se mueve en línea recta y pasa cerca de un planeta o una estrella, su trayectoria se verá distorsionada, de tal forma que, en el límite en el que el campo gravitacional es débil, seguirá una trayectoria Newtoniana [18].

Un análisis similar se puede hacer para la luz, si se analiza una partícula sin masa, un fotón por ejemplo, en el límite newtoniano, para M/r muy pequeño, la trayectoria obtenida sería una línea recta. En caso contrario, en el límite relativista,

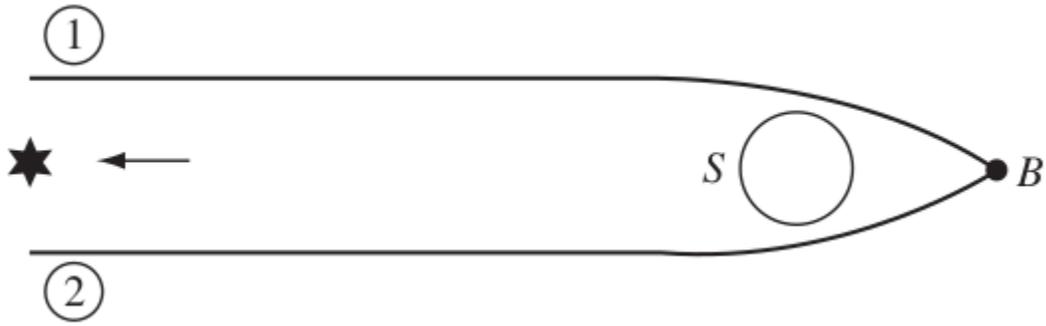


Figura 2.1. Dos fotones provenientes de la misma estrella parten de los puntos **1** y **2**. Los dos fotones son desviados por la estrella **S** de tal forma que un observador en **B** observaría a dos fotones viniendo de direcciones aparentemente diferentes. Imagen obtenida de [18].

el fotón se desvía. Qué tanto se desvía depende de la masa de la estrella y de la trayectoria original [18].

Si diferentes fotones provenientes de la misma estrella son desviados en direcciones opuestas por otra estrella o un objeto con mucha masa, un observador podría terminar viendo dos imágenes de la estrella viniendo de aparentemente diferentes direcciones, así como se ilustra en la figura 2.1. Este fenómeno ejemplifica el hecho de que cuerpos gravitacionales se comportan como lentes [18].

Las observaciones del universo están llenas de imágenes producidas por estos lentes gravitacionales. Este fenómeno ayuda a mapear la distribución de masa de agrupaciones de estrellas, mostrando que estas agrupaciones contienen mucha más masa de la que se le asocia a sus estrellas luminosas. La masa restante se le atribuye a la masa de la *materia oscura*, materia que se espera no interactúe eléctricamente, ya que la luz pasa por ella sin interactuar más que gravitacionalmente [18].

2.1.2. Velocidad de rotación en las galaxias

Un método para determinar la masa contenida en una galaxia espiral es utilizando las curvas de rotación. Se les llama curvas de rotación a la función que relaciona a la velocidad de rotación de las estrellas moviéndose al rededor del centro de una galaxia en función del radio. Asumiendo densidad uniforme y utilizando mecánica Newtoniana, la velocidad de rotación se relaciona con el radio utilizando la ecuación

$$\frac{V_{rot}^2}{R} = \frac{GM(< R)}{R^2}$$

en donde V_{rot} es la velocidad de rotación, R es el radio con relación al centro de la galaxia, G es la constante de gravitación universal y $M(< R)$ es la masa de la galaxia para un radio menor a R . Utilizando esta ecuación, se esperaría que en la región en donde la densidad de masa es cercana a cero, la velocidad de rotación decrecería de forma Kepleriana ($V \propto R^{-1/2}$).

Por otro lado, existe una correlación presentada por la mayoría de las estrellas entre su luminosidad y su temperatura. El diagrama de luminosidad-temperatura se le llama diagrama de *Hertzsprung-Russell*, a las estrellas que obedecen dicha correlación se les llama *estrellas de la secuencia principal*. Las estrellas de la secuencia principal también presentan una correlación entre luminosidad y masa, de la forma $L = M^p$, en donde L es la luminosidad, M la masa y $p \approx 3.5$ en unidades solares [22].

Observaciones de muchas galaxias muestran que la luminosidad decrece con el radio (R), por otro lado, la velocidad de rotación de la materia luminosa alrededor de la galaxia muestra un aumento cerca del núcleo seguido de una sección en la que disminuye. Al comienzo no se contaba con información para radios muy grandes, por lo que no se conocía la velocidad para estas regiones. Debido a esto se asumía que la velocidad seguía disminuyendo con el radio al igual que la luminosidad, llegando a una disminución Kepleriana para R grande [9].

Con los años se fue mejorando la capacidad observacional y se pudo obtener la curva de rotación de una gran cantidad de galaxias a distancias muy por encima de las que se tenían. El resultado fue inesperado, las curvas de rotación mostraban que la velocidad se aplanaba mientras que la luminosidad disminuía, contradiciendo lo que se esperaba en la época. Faber [9] menciona algunos de los argumentos que se realizaron para explicar estas observaciones tales como errores en las observaciones o la utilización de un modelo diferente de distribución de masa en la galaxia. Se compusieron los posibles errores en las observaciones y se descartó que un modelo diferente de distribución de masa pudiera producir dichas curvas sin incluir en el modelo masa no luminosa [9]. Cabe mencionar que hay una alternativa a la materia oscura para explicar estas curvas de rotación, proponiendo que la dinámica Newtoniana deja de funcionar en el límite para aceleraciones pequeñas, a esta nueva dinámica se le llama dinámica Newtoniana modificada (MONDs por sus siglas en inglés). En la figura 2.2 se observa la curva de rotación de la galaxia espiral NGC 2403 observada y la predicha por una MOND [17].

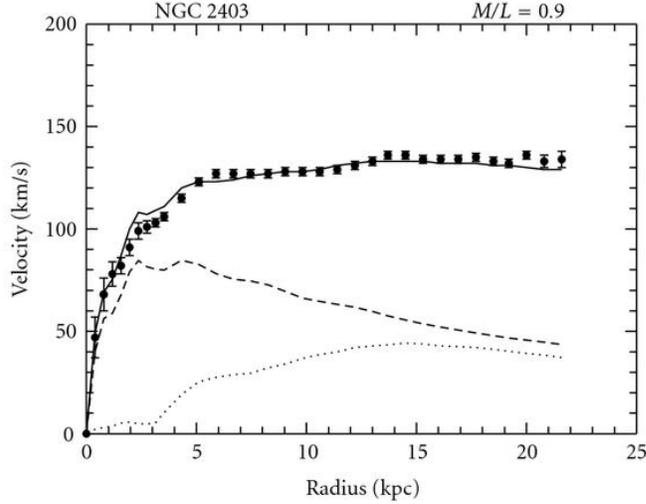


Figura 2.2. Curva de rotación de la galaxia espiral NGC 2403. Curva de rotación Newtoniana con línea discontinua, asumiendo un valor constante de la razón entre masa y luminosidad de 0.9 en unidades solares. La línea punteada es la curva de rotación Newtoniana debido a los componentes gaseosos y la línea continua es la predicción por una MOND [17].

2.1.3. Anisotropías en el fondo cósmico de microondas

Estudiar el fondo cósmico de microondas significa estudiar parte de la formación del universo. Primero, un poco de contexto: La rama de la física encargada del estudio del universo, su historia, su evolución, composición y dinámica es la cosmología [18].

Para estudiar la historia del universo, se utilizan una de las siguientes variables: tiempo, el factor de escala $a(t)$, la constante de Hubble $H(t)$ o la temperatura $T(t)$. La constante de Hubble describe qué tanto se alejan dos cuerpos en el universo dependiendo de su distancia relativa debido a la expansión del universo

$$H_0 = \frac{\dot{r}}{r},$$

el factor de escala $a(t)$ es una medida de cómo cambian las distancias con el tiempo, $r(t) \rightarrow a(t)r$. Con esta definición, la dependencia de la constante de Hubble con el tiempo está dada por

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Uno de los resultados encontrados en cosmología es que el universo se está

expandiendo. “Si la densidad de materia siempre ha sido positiva, y si la constante cosmológica es no-negativa, entonces las ecuaciones de Einstein hacen al Big Bang inevitable [18]”. Mientras vamos retrocediendo en la historia, la densidad de materia va aumentando. En algún momento del pasado esta densidad de materia era tan alta que toda la materia se encontraba en un estado de plasma opaco a la luz por lo cual es imposible observar lo que pasó en ese entonces, en el momento en que la materia se empezó a enfriar, empezó a ser posible la emisión de fotones, los cuales son los que se observan actualmente en el fondo cósmico de microondas (CMB por sus siglas en inglés) [18].

La información más relevante que ofrece el CMB es su distribución de Energía o Temperatura. Una poderosa herramienta para estudiar la evolución del universo es estudiar la distribución de materia en las estructuras a diferentes escalas. Grandes estructuras una vez fueron pequeñas irregularidades [5]. Por ello es importante estudiar las irregularidades en el CMB y sus posibles causas. Se puede utilizar dinámica Newtoniana para estudiar la evolución de estas irregularidades, utilizando la ecuación de continuidad, la ecuación de Euler para fluidos y la ecuación de Poisson describiendo la interacción gravitacional. Con estas ecuaciones aplicadas a un fluido homogéneo en expansión, se puede llegar a la ecuación de Jeans

$$\ddot{\delta}(k, t) + 2H\dot{\delta}(k, t) = \delta(k, t)\left[\frac{1}{2M_{PL}^2}\rho - \left(\frac{c_s k a_0}{a}\right)^2\right]$$

donde δ es la transformada de Fourier de las irregularidades para la densidad de materia escrita en términos de un parámetro adimensional, H es la constante de Hubble, $M_{PL} = 1/\sqrt{8\pi G}$ con G la constante de gravitación universal, ρ es la densidad de materia sin la irregularidad, c_s es la velocidad del sonido en el fluido, a es el factor de escala y a_0 es el factor de escala en un tiempo determinado [5]. En corchetes hay dos términos compitiendo, uno corresponde a la compresión gravitacional y el otro a la presión del fluido. El número de honda para el cual estos dos factores se cancelan se le llama la *longitud de onda de Jeans*

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{a_0}{a} c_s \sqrt{\frac{2M_{PL}^2}{\rho}} [5],$$

Perturbaciones de este tamaño no crecen ni disminuyen. Para longitudes de onda muy por debajo de la longitud de onda de Jeans, $\lambda \ll \lambda_J$, la ecuación de Jeans se convierte en la ecuación de un oscilador armónico amortiguado, en donde las oscilaciones tienen una amplitud decreciente [5].

Para longitudes de onda muy por encima de la longitud de onda de Jeans, $\lambda \gg \lambda_J$, el término de presión en la ecuación de Jeans puede ser despreciado, utilizando $a \propto t^{2/3}$ [18] [5] para un universo donde domina la materia, la ecuación de Euler y simplificando la ecuación de Jeans, se puede obtener

$$\delta \propto t^{2/3},$$

$$\delta =: \frac{a}{a_0} \delta_0.$$

Citando los valores encontrados en [5], el valor aproximado para el factor de escala en el momento en que la densidad de energía era igual al de la materia (lo observado en el CMB) $a_{dec} \approx 1/1100$ y el valor esperado para δ para dicho momento es $\delta_{dec} \approx 10^{-5}$. Lo que devuelve el valor de δ_0 para el día de hoy,

$$\delta_0 = \frac{\delta_{dec}}{a_{dec}} = 1100\delta_{dec}$$

Al comparar dicho valor con simulaciones, lo observado en el CMB indica que fluctuaciones incluyendo fotones y bariones no es suficiente para obtener las grandes estructuras del universo que se tiene hoy en día. La situación se mejora incluyendo un factor dominante de materia no relativista con presión despreciable [5].

2.2. Algunos candidatos para materia oscura

En las secciones anteriores se describió algunas evidencias que apuntan a la existencia de la materia oscura, materia que aún se está intentando detectar. La búsqueda tiene que enfocarse en la búsqueda de partículas que cumplan con las restricciones planteadas por las evidencias de su existencia, entre ellas que no interactúen eléctricamente y que sean estables, con tiempos de vida media comparables con la edad del universo [15]. A continuación se describen tres partículas teóricas candidatas a ser partículas de materia oscura.

2.2.1. Partículas WIMP

Las partículas masivas que interactúan de forma débil (WIMP por sus siglas en inglés) son partículas que únicamente interactúan gravitacionalmente y posiblemente por medio de una interacción más allá del modelo estándar de magnitud igual o menor a la fuerza débil [15].

Estas partículas encajan bien con los modelos cosmológicos utilizados hoy en día: Cuando la temperatura del universo era superior a la masa de las WIMPs, $T > m_{wp}$, la materia oscura estaba en equilibrio térmico y pares partícula-antipartícula se creaban y destruían. Con el tiempo la temperatura disminuyó y la creación de pares partícula-antipartícula cesó, pero las aniquilaciones continuaron hasta que la densidad fue suficientemente pequeña para que la interacción ya no se diera, a partir de entonces la densidad de partículas WIMP se mantuvo prácticamente sin cambios. Para que la densidad de materia oscura este en acuerdo con el modelo planteado, la masa de las partículas tiene que estar en el rango de GeV a TeV con una sección eficaz de interacción media $\langle\sigma\rangle \cong 3 \times 10^{-26} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$. Al ser partículas con mucha masa, las WIMPs se mueven lentamente, por lo que son uno de los candidatos a lo que se les llama *materia oscura fría* (CDM por sus siglas en inglés) [15].

2.2.2. Partículas autointeractuantes

Utilizando simulaciones, las partículas WIMP han logrado predecir exitosamente la estructura del universo a grandes escalas, pero las simulaciones que se han logrado realizar no han devuelto resultados compatibles a escalas menores. Han predicho grandes concentraciones de materia en los centros de los cúmulos de galaxias, pero muchas de ellas, incluyendo en la que nos encontramos, el cúmulo Milky Way, parece tener menor cantidad de galaxias que las predichas por las simulaciones [21]

Una propuesta para aliviar este problema son las partículas autointeractuantes, partículas que siguen teniendo las características de las partículas WIMP, pero además tienen la capacidad de interactuar entre ellas de forma elástica, siempre y cuando la sección eficaz de aniquilación sea mucho menor que la sección eficaz de dispersión entre ellas [21] [15], esta condición se traduce en que la aniquilación entre las partículas suceda a una tasa mucho menor que su dispersión. Hay que recalcar que, a pesar de esta interacción mutua, la tasa de colisiones en el universo temprano es despreciable, por lo que no afecta a los modelos cosmológicos [21] [15].

2.2.3. Neutrino Estéril

El neutrino estéril es un leptón hipotético fuera del modelo estándar de partículas, con una masa alrededor de los keV, que, en principio, puede ser un candidato para materia oscura que sobrepase algunos de los inconvenientes surgidos con la CDM [15].

A estos neutrinos se les llama *materia oscura tibia* por viajar a velocidades relativistas aun después de desacoplarse del plasma en el que estaba el universo en etapas tempranas de su existencia. Estos neutrinos describen bastante bien el estado actual de la densidad de materia oscura. Un problema que surge con ellos es que en las etapas tempranas del universo se moverían muy rápido como para poder contribuir a la formación de los cúmulos de materia, que posteriormente evolucionarían a ser las estructuras vistas actualmente [15] [5].

2.3. Detectando materia oscura

Hay tres posibles maneras en las que se está intentando detectar materia oscura, detección directa, detección indirecta y producción a través de aceleradores de partículas [15].

La detección indirecta se refiere a la detección de los productos del decaimiento o aniquilación de partículas de materia oscura ocurriendo en galaxias o grupos de galaxias donde se espera altas concentraciones de materia oscura [15]. Esta forma de detección solo funciona si la materia oscura interactúa de otra forma diferente a la gravitacional. Se esperaría detectar tanto fotones como pares de partículas-antipartículas. Un punto clave es que los leptones y los protones pueden venir de muchos diferentes fenómenos, pero procesos en donde se detecten antipartículas son más raros. La mayor búsqueda en astrofísica es en pulsares, pues producen electrones y positrones [5]. Por ejemplo, el experimento PAMELA ha detectado pulsares con un flujo de positrones señalando una posible aniquilación de partículas WIMP [5] [7] [12] [16].

La detección directa se centra en observar los efectos de las colisiones entre materia oscura y materia bariónica en el momento en que una partícula de materia oscura pasa por un detector en la tierra [15] [5].

La detección utilizando aceleradores de partículas pretende detectar la materia oscura al producirla en el laboratorio [15]. Se basa en dos propiedades de la materia oscura, primero, las partículas tienen que estar acopladas a partículas del modelo estándar y segundo, se intenta medir partículas que interactúan débilmente [5].

3. Sobre el Efecto Sommerfeld

3.1. Un experimento prometedor

Como se dijo en el capítulo anterior, una forma en la que se está intentando detectar materia oscura es por detección indirecta, un ejemplo es el experimento PAMELA, un proyecto que tenía entre sus objetivos la búsqueda de materia oscura, diseñada para medir, entre otras cosas, el espectro de positrones y electrones en rayos cósmicos con gran precisión [1] [7]. Un resultado de dicho experimento fue que se encontró un aumento pronunciado en la fracción de positrones, definida como

$$f(E) = \frac{\Phi_{e^+}}{\Phi_{e^+} + \Phi_{e^-}},$$

donde Φ_{e^+} y Φ_{e^-} son el flujo de electrones y positrones respectivamente, en señales con energía entre los ~ 7 GeV y los 100 GeV [19].

Ejemplos de otros experimentos que han mostrado dicho resultado son el experimento HEAT, con observaciones en el rango de 1 GeV a 50 GeV [4] y el ASM-01 con observaciones en el rango de 1 GeV a los 30 GeV [2].

Los electrones en los rayos cósmicos se cree que son acelerados tras explosiones supernova e interactúan con el medio interestelar de formas electromagnéticas tales como el efecto Compton inverso y radiación sincrotrón; los positrones son producidos en decaimientos de partículas π^+ ; la relación e^+/e^- esperada por estos procesos es de $\sim 10\%$ [2].

La aniquilación de materia oscura es considerada como una posible fuente extra de positrones [7], sin embargo, hay dificultad para interpretar el aumento en la fracción de positrones como una posible aniquilación de partículas WIMP, al menos como una aniquilación directa de partículas WIMP a leptones ligeros [7] [19]. En [7] se habla de la posibilidad de que la aniquilación sea primero una aniquilación en partículas escalares más pesadas y que los positrones sean producto del decaimiento de dichas partículas.

Una de las dificultades existentes para poder considerar a estos hallazgos como posibles señales provenientes de la aniquilación de materia oscura es encontrar un mecanismo por medio del cual este proceso se amplifica. Una propuesta es considerar a la materia oscura compuesta de partículas autointeractuantes, en donde la sección eficaz de aniquilación se ve amplificada por el efecto Sommerfeld para el caso de velocidades pequeñas [12].

3.2. Efecto Sommerfeld

El efecto Sommerfeld es el efecto producido en la sección eficaz de alguna interacción por la presencia de un potencial [14]. La sección eficaz es una forma de cuantificar que tan probable es que ocurra una interacción, por ejemplo, en la aniquilación de dos partículas de materia oscura, entre más grande la sección eficaz, la aniquilación es más común. Si F es el flujo inicial de partículas, es decir, el número de partículas que colisionan por unidad de tiempo por unidad de area, y N es el número de interacciones por unidad de tiempo, entonces,

$$N = \sigma F$$

en donde σ es la sección eficaz de la interacción. El significado del efecto Sommerfeld se puede entender con un ejemplo de juguete, digamos que hay dos partículas moviéndose una hacia la otra, en ausencia de un potencial, existe cierta probabilidad de que las dos partículas sufran difracción. Ahora, digamos que las dos partículas son un electrón y un protón, entonces existe un potencial atractivo entre ellos, de tal forma que es más probable que exista difracción que en el caso anterior, traducándose en una sección eficaz mayor. Este aumento en la sección eficaz de la interacción entre dos partículas por la presencia de un potencial es lo que se le conoce como el efecto Sommerfeld.

A lo que se le conoce como el *factor del efecto Sommerfeld* es qué tanto se incrementa o disminuye la sección eficaz de interacción por la presencia del potencial, es decir,

$$\sigma = S\sigma_0 \tag{3.1}$$

donde σ es la sección eficaz de la interacción, σ_0 es la sección eficaz de la interacción que tendría sin la presencia de un potencial y S es el factor del efecto Sommerfeld [14].

Para el caso de la aniquilación de dos partículas, puede suponerse que la inter-

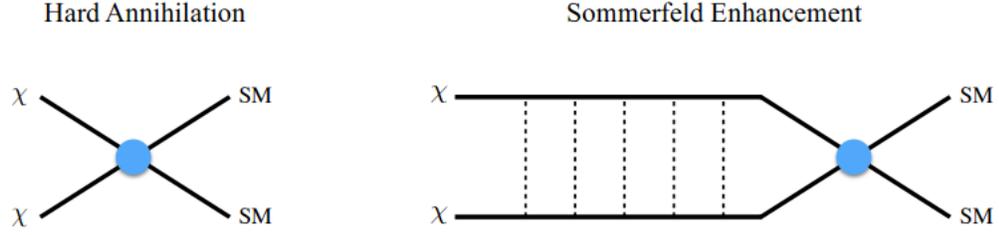


Figura 3.1. Aniquilación de dos partículas de materia oscura χ en partículas del modelo estándar (SM). Sin el efecto Sommerfeld a la izquierda y con el efecto Sommerfeld a la derecha. Imagen obtenida de [13].

acción sucederá si las dos partículas se encuentran en el mismo punto, digamos, el origen. La sección eficaz de interacción es proporcional a la probabilidad de que esto pase, lo que en mecánica cuántica se obtiene por medio del módulo al cuadrado de la función de onda, entonces se tiene que

$$\sigma \propto |\Psi(0)|^2. \quad (3.2)$$

Utilizando (6.1) y (6.2), el factor del defecto Sommerfeld es [14]

$$S = \frac{|\Psi(0)|^2}{|\Psi_0(0)|^2}. \quad (3.3)$$

En mecánica cuántica no relativista, la función de onda se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger. En mecánica cuántica relativista, desde el punto de vista de teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés), este potencial se traduce como la contribución de diagramas de Feynman más complejos, en donde el potencial es el intercambio de partículas virtuales, así como se muestra en la figura 3.1 [12].

El efecto Sommerfeld se introduce al estudio de la materia oscura suponiendo que esta es auto interactuante, en donde las partículas de DM pueden interactuar por medio de algún potencial antes de aniquilarse, distorsionando la función de onda y consecuentemente la sección eficaz de interacción [13]. Por ejemplo, si se introduce una función escalar ϕ , de tal forma que el hamiltoniano de interacción entre las dos partículas de DM sea $\chi^\dagger \phi \chi$ (este hamiltoniano de interacción es el centro del presente trabajo). Además de su importancia en el estudio de la materia oscura, estudiar el efecto Sommerfeld es importante en cualquier experimento de detección

de partículas, por su efecto en la sección eficaz.

4. Aniquilación de dos fermiones de materia oscura

4.1. Preliminares

Este capítulo será dedicado a describir el procedimiento realizado para la obtención de la amplitud en la aniquilación de dos partículas de materia oscura fermiónicas a dos partículas del modelo estandar. Lo realizaré desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, así que primero introduciré algunos conceptos importantes que serán de utilidad en el momento de calcular la amplitud.

4.1.1. Campos escalares

La teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés) trata de estudiar los campos cuantizados. Clásicamente, un campo es una cantidad definida en cada punto del espacio y el tiempo $\phi(\vec{x}, t)$, por ejemplo, el campo electromagnético.

Cuando se estudia mecánica cuántica se aprende sobre la cuantización canónica, en donde primero se encuentra el Hamiltoniano clásico $H(q_i, p_i)$ y después se encuentra el operador Hamiltoniano $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{q}_i)$ que ahora en vez de ser una función, es un operador hermítico operando sobre un elemento de un espacio de Hilbert, $|\psi\rangle$, al cual se le llama *función de onda*. De forma análoga, en QFT se cuantiza al campo clásico, pero esta vez el campo no es una función dependiente de una cantidad discreta de elementos, sino que depende de cantidades continuas.

Los campos con los que trata QFT son campos que describen a las partículas. De cierta forma, dentro de esta teoría, las partículas fundamentales como los electrones, son descritas por campos, así como los fotones son descritos por el campo electromagnético. Las propiedades de las partículas a las que estamos acostumbrados salen como perturbaciones de dichos campos.

El procedimiento utilizado para cuantizar un campo clásico describiendo a una partícula libre es análogo al realizado para cuantizar el oscilador armónico. Los campos cuantizados terminan siendo operadores escritos en términos de operadores de creación y aniquilación, interpretados como creación y aniquilación de partículas.

Utilizando unidades naturales, es decir $\hbar = c = 1$, un campo escalar tiene la forma

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (4.1)$$

donde $a_{\vec{p}}^\dagger$ es un operador que crea una partícula con momento \vec{p} , $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = |\vec{p}\rangle$, $a_{\vec{p}}$ es un operador que destruye una partícula con momento \vec{p} , $a_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle = |0\rangle$, $E_{\vec{p}}$ es la energía de las partículas, $H_0 |\vec{p}\rangle = E_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle$, donde H_0 es el operador Hamiltoniano de la partícula libre y $|0\rangle$ es el estado tal que [23]

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (4.2)$$

Los operadores de creación y aniquilación obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] &= [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \\ [H_0, a_{\vec{q}}^\dagger] &= E_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^\dagger \\ [H_0, a_{\vec{q}}] &= -E_{\vec{q}} a_{\vec{q}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador entre A y B [23].

4.1.2. Campos fermiónicos

La ecuación de Dirac es una ecuación de primer orden en las derivadas que a su vez es covariante Lorenz, escrita utilizando la convención de Einstein,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

en donde utilicé $a^\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu$. A diferencia de algunos textos, solo supondré que la suma es implícita si hay un índice arriba y uno abajo, de forma que $a^\mu b^\mu$ no significará suma implícita. Utilizaré letras griegas para denotar sumas de 0 a 3 y letras latinas para denotar sumas de 1 a 3. La métrica que utilizaré será aquella que tiene los elementos de la diagonal como $(1, -1, -1, -1)$. Cuando se habla de coordenadas, siempre utilizaré a la coordenada 0 como el tiempo y las coordenadas 1, 2 y 3 como las coordenadas x , y y z respectivamente. Por último, para hablar de vectores, como he estado trabajando, utilizaré una flecha arriba del vector, \vec{v} , mientras para cuadvectores utilizaré letras normales, v , la distinción entre cuadvectores y

escalares se identificará por el contexto. Una vez aclarado lo anterior, como modo de ejemplo, la ecuación de Dirac también se podría escribir como

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = 0$$

en donde γ^μ es un elemento de las algebras de Clifford, es decir, obedece las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I$$

con I el elemento identidad y $\eta^{\mu\nu} = 1$ para $\mu = \nu = 0$, $\eta^{\mu\nu} = -1$ para $\mu = \nu = i$, con i un número entre 1 y 3, y $\eta^{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. $\eta^{\mu\nu}$ son los elementos de la métrica de Minkowsky, por lo que suele utilizarse muy a menudo para lo que informalmente se le llama, subir y bajar índices, es decir $\eta^{\mu\nu} a_\mu a_\nu = a^\mu a_\mu$.

La representación del algebra de Clifford más simple y también la que se utiliza en este trabajo son matrices de 4×4 . Se utilizará una representación que cumpla las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I \\ (\gamma^i)^2 &= -I \\ (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i \\ (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) &= (\gamma^\mu)^\dagger \end{aligned} \tag{4.4}$$

en donde $(\gamma^\mu)^\dagger$ es la matriz adjunta, es decir, la transpuesta conjugada de γ^μ . Cuando se necesite hablar de una representación en específico para estas matrices, se utilizará la representación de Weyl, en donde

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

con

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Falta aclarar que las soluciones para la ecuación de Dirac son espinores, objetos con cuatro componentes.

Utilizando la representación (4.5), se pueden encontrar cuatro soluciones inde-

pendientes para la ecuación de Dirac, dos con fase positiva y dos con fase negativa,

$$\psi^{1,2} = u^{1,2}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \psi^{3,4} = v^{1,2}(\vec{p})e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

en donde

$$u(\vec{p})^{1,2} = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \epsilon^{1,2} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \epsilon^{1,2} \end{bmatrix}, v(\vec{p})^{1,2} = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^{1,2} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^{1,2} \end{bmatrix}$$

con p el cuadrivector del momento, $\sigma^T = (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, $\bar{\sigma}^T = (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$, $\epsilon^{1,2}$ dos vectores de 2 componentes linealmente independientes y $\eta^{1,2}$ también dos vectores linealmente independientes [23].

Eligiendo vectores ϵ y η tales que cumplan las relaciones

$$\epsilon^{r\dagger} \epsilon^s = \delta^{rs}, \eta^{r\dagger} \eta^s = \delta^{rs}$$

y utilizando la identidad $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = m^2$, se puede encontrar las relaciones

$$\begin{aligned} u^{r\dagger}(\vec{p}) \cdot u^s(\vec{p}) &= 2p_0 \delta^{rs} \\ \bar{u}^r(\vec{p}) \cdot u^s(\vec{p}) &= 2m \delta^{rs} \\ v^{r\dagger}(\vec{p}) \cdot v^s(\vec{p}) &= 2p_0 \delta^{rs} \\ \bar{v}^r(\vec{p}) \cdot v^s(\vec{p}) &= -2m \delta^{rs} \\ \bar{u}^r(\vec{p}) \cdot v^s(\vec{p}) &= \bar{v}^r(\vec{p}) \cdot u^s(\vec{p}) = 0 \\ u^{r\dagger}(\vec{p}) \cdot v^s(-\vec{p}) &= v^{r\dagger}(\vec{p}) \cdot u^s(-\vec{p}) = 0 \\ \sum_{s=1}^2 u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) &= \gamma^\mu p_\mu + m \\ \sum_{s=1}^2 v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) &= \gamma^\mu p_\mu - m \end{aligned} \tag{4.6}$$

con $\bar{a} = a^\dagger \gamma^0$ [23].

De igual forma que se escribió al campo escalar en términos de operadores de creación y aniquilación, el campo de Dirac cuantizado tiene la forma

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + c_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}]$$

en donde $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ es un operador que crea partículas fermiónicas con momento \vec{p} y $c_{\vec{p}}^{s\dagger}$ crea antipartículas fermiónicas con momento \vec{p} . Estos operadores de creación y aniquilación cumplen las relaciones de anticonmutación

$$\{b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{q}}^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

$$\{c_{\vec{p}}^s, c_{\vec{q}}^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

y todas las demás relaciones iguales a cero. Con el Hamiltoniano, cumplen las relaciones de conmutación [23]

$$[H_0, b_{\vec{q}}^{r\dagger}] = E_{\vec{p}} b_{\vec{q}}^{r\dagger}, [H_0, c_{\vec{q}}^{r\dagger}] = E_{\vec{p}} c_{\vec{q}}^{r\dagger}$$

$$[H_0, b_{\vec{q}}^r] = -E_{\vec{p}} b_{\vec{q}}^r, [H_0, c_{\vec{q}}^r] = -E_{\vec{p}} c_{\vec{q}}^r.$$

4.1.3. Amplitud de una interacción

Al estudiar mecánica cuántica, se aprende que la dinámica de un sistema es gobernada por el operador Hamiltoniano \hat{H} . Una forma de interpretar esta dinámica es donde el estado de la partícula $|\psi\rangle_S$ evoluciona con el tiempo obedeciendo la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d|\psi\rangle_S}{dt} = \hat{H} |\psi\rangle_S,$$

mientras los operadores son independientes del tiempo. Otra forma de verlo es donde el estado de la partícula $|\psi\rangle_H$ es independiente del tiempo, mientras los operadores \hat{O}_H evolucionan en el tiempo siguiendo la ecuación

$$\frac{d\hat{O}_H}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}_H][23].$$

Estas dos interpretaciones son equivalentes, con la relación entre ambas dada por

$$|\psi\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |\psi\rangle_S$$

$$\hat{O}_H = e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}$$

Cuando se trabaja con un Hamiltoniano que consiste en una perturbación a un Hamiltoniano con solución conocida, se puede adoptar una tercera perspectiva. El Hamiltoniano se escribe

$$H = H_0 + H_{int}$$

con H_0 el Hamiltoniano con solución conocida y H_{int} una perturbación cuya contribución se supone es pequeña. Entonces se toma a los operadores como dependientes del tiempo con su dinámica gobernada por el Hamiltoniano no perturbado, mientras la dependencia temporal de los estados esta dado por la perturbación,

$$\hat{O}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (4.7)$$

$$|\psi\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_S$$

utilizando $\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t}$, se obtiene

$$i \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = \hat{H}_I |\psi\rangle_I. \quad (4.8)$$

Ahora, $|\psi\rangle_I$ va a evolucionar en el tiempo, por lo que se tiene que

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}(t_0, t) |\psi(0)\rangle_I, \quad (4.9)$$

sustituyendo a (4.9) en (4.8) se puede demostrar que la solución para $\hat{U}(t_0, t)$ está dada por la fórmula de Dyson

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_0, t) &= T \exp\left(-i \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') dt'\right) \\ &= I - i \int_{t_0}^t \hat{H}(t')_I dt' + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} T(\hat{H}(t')_I \hat{H}(t'')_I) dt' dt'' + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

en donde $T(\hat{A}(t')\hat{B}(t'')) = \hat{A}(t')\hat{B}(t'')$ para $t' > t''$ y $T(\hat{A}(t')\hat{B}(t'')) = \hat{B}(t'')\hat{A}(t')$ para $t'' > t'$ [23].

Cuando se trabaja con interacciones, se supondrá que tanto el estado inicial como el final de las partículas está dado por partículas libres y que la interacción sucede en un período de tiempo pequeño. La amplitud de ir de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$ esta dado por

$$\lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t_-, t_+) | i \rangle.$$

Para el presente trabajo se utilizará la teoría de Yukawa, en donde $H_{int} = \lambda \int d^3x \bar{\psi} \phi \psi$. La idea será encontrar H_I y con ello calcular los primeros términos de la amplitud utilizando (4.10).

Antes de proceder, con el cálculo, falta introducir una herramienta que será

necesaria. El propagador de Feynman para partículas escalares se define como

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

mientras el propagador de Feynman para espinores es

$$S_F(x-y) = \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{\gamma\cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.11)$$

El teorema de Wick dice que, para cualquier colección de campos, $\phi(x_1) = \phi_1, \phi(x_2) = \phi_2, \dots$, se tiene que

$$T(\phi_1\phi_2\cdots) =: (\phi_1\phi_2\cdots) : + : \text{contracciones} :$$

en donde una contracción se define como sustituir cualesquiera dos campos con el propagador de Feynman correspondiente,

$$\overbrace{\phi_i \cdots \phi_j} = \Delta_F(x_i - x_j) := C(\phi_i\phi_j)$$

$$\overbrace{\psi_i \cdots \bar{\psi}_j} = S_F(x_i - x_j) := C(\bar{\psi}_j\psi_i)$$

$$\overbrace{\psi_i \cdots \psi_j} = \overbrace{\bar{\psi}_i \cdots \bar{\psi}_j} = \overbrace{\psi_i \cdots \phi_j} = 0$$

y $: (\phi_1\phi_2\cdots) :$ significa escribir los operadores en orden normal, es decir, todos los operadores de creación a la izquierda y los operadores de aniquilación a la derecha [23].

4.1.4. Procesos de aniquilación

En el presente trabajo se pretende estudiar un proceso de aniquilación entre dos partículas de materia oscura a dos o más partículas del modelo estándar. Ejemplos de este tipo de interacción tienen un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}$$

en donde \mathcal{L}_{free} es el Lagrangiano de las partículas libres y \mathcal{L}_{int} es el Lagrangiano de las posibles interacciones, entonces suponiendo que hay una partícula escalar

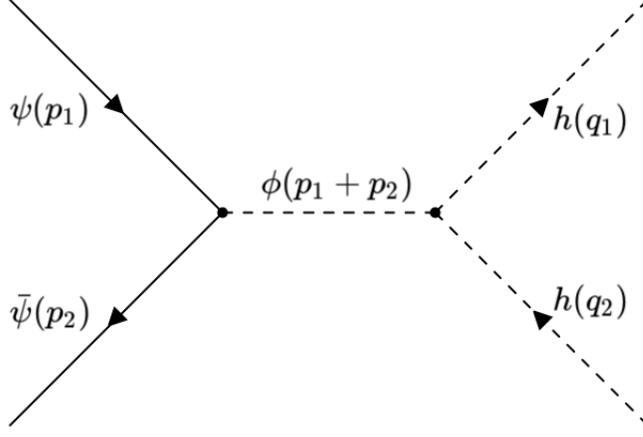


Figura 4.1. Diagrama de Feynman de la interacción en donde una partícula ψ y una antipartícula $\bar{\psi}$ de materia oscura fermiónica con momentos p_1 y p_2 respectivamente se aniquilan y producen dos partículas escalares h con momentos q_1 y q_2 .

mediadora ϕ , el Lagrangiano de interacción podría tomar la forma

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda_1 \bar{\psi} \phi \psi + \lambda_2 \phi h^2$$

en donde h es el campo de una partícula escalar perteneciente al modelo estándar y ψ es el campo de un fermión de materia oscura. Un posible proceso de aniquilación se muestra en la figura 4.1, en donde dos partículas de materia oscura se aniquilan y se crean dos partículas escalares h . la amplitud de este proceso se podría obtener utilizando las reglas de Feynman [23],

$$\mathcal{M} = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) (-i\lambda_1) (-i\lambda_2) \frac{i[\bar{v}^s(p_2) u^r(p_1)]}{(p_1 + p_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon}.$$

El Lagrangiano de interacción también podría incluir la interacción con otro tipo de partículas fermiónicas f , las cuales se supondría que son parte del modelo estándar. Entonces

$$\mathcal{L} = \lambda_1 \bar{\psi} \phi \psi + \lambda_3 \bar{f} \phi f$$

este Lagrangiano haría posible procesos como el mostrado en la figura 4.2, en donde dos fermiones de materia oscura se aniquilan y se crean dos fermiones del modelo estándar. Otra vez, utilizando las reglas de Feynman,

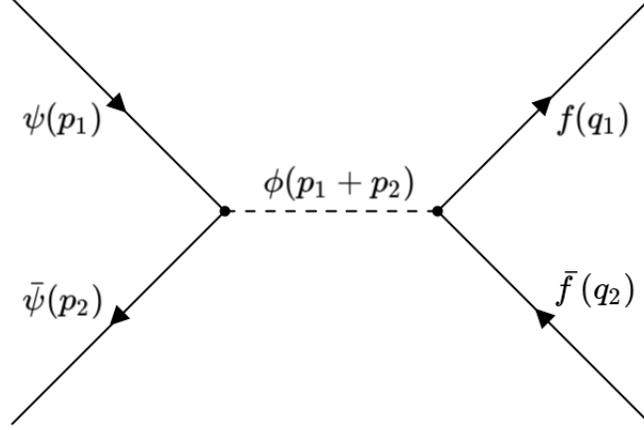


Figura 4.2. Diagrama de Feynman de la interacción en donde una partícula ψ y una antipartícula $\bar{\psi}$ de materia oscura fermiónica con momentos p_1 y p_2 respectivamente se aniquilan y producen un par fermión antifermión de partículas del modelo estandar f, \bar{f} con momentos q_1 y q_2 .

$$\mathcal{M} = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) (-i\lambda_1) (-i\lambda_3) \frac{i[\bar{v}^s(p_2)u^r(p_1)][v^{s'}(q_2)\bar{u}^{r'}(q_1)]}{(p_1 + p_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

En el presente trabajo se analizará únicamente el termino de interacción $\bar{\psi}\phi\psi$ conocida como la teoría de Yukawa.

4.2. Cálculo de la amplitud

Como ya se mencionó en la sección anterior, la amplitud se calculará de forma aproximada encontrando el Hamiltoniano de interacción H_I para la teoría de Yukawa en donde $H_{int} = \int d^3x \lambda \bar{\psi}\phi\psi$ y sustituyéndolo en (4.10), con lo cual se calcularán los primeros términos.

4.2.1. Encontrando H_I

Conforme a (4.7), el hamiltoniano de interacción que necesitamos para calcular la amplitud es

$$\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t}$$

sustituyendo \hat{H}_{int} de la teoría de Yukawa

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I &= e^{i\hat{H}_0 t} \int d^3x [\lambda \bar{\psi} \phi \psi] e^{-i\hat{H}_0 t} \\
&= \lambda \int d^3x [x e^{i\hat{H}_0 t} \bar{\psi} e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t} \phi e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t} \psi e^{-i\hat{H}_0 t}] \\
&= \lambda \int d^3x [\bar{\psi}_I \phi_I \psi_I].
\end{aligned}$$

Para encontrar ψ_I , ϕ_I y $\bar{\psi}_I$ primero veamos que sucede si movemos de lugar a un operador de creación o aniquilación que está siendo operado junto al operador Hamiltoniano de la partícula libre H_0 elevado a un número entero positivo n :

$$\begin{aligned}
\hat{H}^n a_{\vec{p}}^\dagger &= (\cdots \hat{H}_0 \hat{H}_0 \hat{H}_0) a_{\vec{p}}^\dagger \stackrel{(4.3)}{=} (\cdots \hat{H}_0 \hat{H}_0 a_{\vec{p}}^\dagger (E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)) \\
&= (\cdots \hat{H}_0 a_{\vec{p}}^\dagger (E_{\vec{p}} + \hat{H}_0) (E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)) = \cdots = a_{\vec{p}}^\dagger (E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)^n \\
\hat{H}^n a_{\vec{p}} &= (\cdots \hat{H}_0 \hat{H}_0 \hat{H}_0) a_{\vec{p}} \stackrel{(4.3)}{=} (\cdots \hat{H}_0 \hat{H}_0 a_{\vec{p}} (-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)) \\
&= (\cdots \hat{H}_0 a_{\vec{p}} (-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0) (-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)) = \cdots = a_{\vec{p}} (-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)^n.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilizando este resultado, veamos a cuanto es igual $e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$

$$\begin{aligned}
e^{i\hat{H}_0 t} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t} &= (I + i\hat{H}_0 t + \frac{(i\hat{H}_0 t)^2}{2} + \cdots) a_{\vec{p}}^\dagger (I - i\hat{H}_0 t + \frac{(-i\hat{H}_0 t)^2}{2} + \cdots) \\
&\stackrel{(4.12)}{=} a_{\vec{p}}^\dagger (I + i(-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)t + \frac{(i(E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)t)^2}{2} + \cdots) (I - i\hat{H}_0 t + \frac{(-i\hat{H}_0 t)^2}{2} + \cdots) \\
&= a_{\vec{p}}^\dagger e^{i(-E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)t} e^{-i\hat{H}_0 t} = a_{\vec{p}}^\dagger e^{i(E_{\vec{p}} + \hat{H}_0)t + (-i\hat{H}_0 t)} = a_{\vec{p}}^\dagger e^{-iE_{\vec{p}} t}.
\end{aligned}$$

Utilizando el mismo procedimiento se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{i\hat{H}_0 t} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t} &= a_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}} t} \\
e^{i\hat{H}_0 t} a_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}_0 t} &= a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t} \\
e^{i\hat{H}_0 t} b_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t} &= b_{\vec{p}}^\dagger e^{+iE_{\vec{p}} t} \\
e^{i\hat{H}_0 t} c_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t} &= c_{\vec{p}}^\dagger e^{+iE_{\vec{p}} t} \\
e^{i\hat{H}_0 t} b_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}_0 t} &= b_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t} \\
e^{i\hat{H}_0 t} c_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}_0 t} &= c_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Con estos resultados se obtiene ϕ_I ,

$$\begin{aligned}
\phi_I &= e^{i\hat{H}_0 t} \phi e^{-i\hat{H}_0 t} \\
&\stackrel{(4.1)}{=} e^{i\hat{H}_0 t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) e^{-i\hat{H}_0 t} \\
&\stackrel{(4.13)}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}
\end{aligned}$$

en donde $p^0 = E_{\vec{p}}$ y $x^0 = t$. Utilizando el mismo procedimiento se obtiene a ψ_I . $\bar{\psi}_I$ se obtiene obteniendo el adjunto de ψ_I y multiplicando el resultado por γ^0 por la derecha.

$$\begin{aligned}
\psi_I &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} + c_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\vec{p}) e^{ip\cdot x}]. \\
\bar{\psi}_I &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [b_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\vec{p}) e^{+ip\cdot x} + c_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(\vec{p}) e^{-ip\cdot x}].
\end{aligned}$$

4.2.2. Cálculos preliminares

Para el cálculo de la amplitud, se supone que los estados iniciales y finales de las partículas son descritos por partículas libres, las partículas iniciales son un fermión y un antifermión de materia oscura, las partículas finales son partículas del modelo estándar. Me enfocaré únicamente en el vértice de la interacción, en donde los estados inicial y final son

$$|i\rangle = \sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}} b_{\vec{p}}^{s'\dagger} c_{\vec{q}}^{r'\dagger} |0\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{2E_{\vec{r}}} a_{\vec{r}}^\dagger |0\rangle,$$

en donde los términos de energía son términos de normalización.

Para calcular la amplitud, van a haber muchos términos de la forma $\langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}'_2}^\dagger |0\rangle$ en donde $a_{\vec{k}_i}^\dagger$ es un operador de creación con momento \vec{k}_i . Por esto, realizaré el calculo para uno de estos términos y así identificar en términos generales a que serán igual,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle &\stackrel{(4.3)}{=} \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&\stackrel{(4.3)}{=} \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&\stackrel{(4.3)}{=} \langle 0 | a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \langle 0 | a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&\stackrel{(4.2)}{=} (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_2) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} | 0 \rangle \\
&\quad + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_3) \langle 0 | a_{\vec{k}_1} | 0 \rangle \\
&\quad + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_3) \langle 0 | a_{\vec{k}_2} | 0 \rangle \stackrel{(4.2)}{=} 0
\end{aligned}$$

Este resultado dice algo importante, cualquier término de esta forma en donde no exista la misma cantidad de operadores de creación como de aniquilación terminará siendo igual a cero. Ahora, los términos que no sean iguales a cero serán iguales a la suma de varios términos con $\delta^{(3)}(k'_i - k_j)$, siguiendo el procedimiento para el caso $\langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}'_2}^\dagger a_{\vec{k}'_3}^\dagger | 0 \rangle$ se llega a la solución

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}'_1}^\dagger a_{\vec{k}'_2}^\dagger a_{\vec{k}'_3}^\dagger | 0 \rangle = \\
(2\pi)^9 (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_1) + \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_2) \\
+ \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_3) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_1) + \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_3) \\
+ \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_3) + \delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}'_2 - \vec{k}_3) \delta^{(3)}(\vec{k}'_3 - \vec{k}_2))
\end{aligned}$$

De donde se induce la formula general,

$$\langle 0 | a_{\vec{k}_1} \cdots a_{\vec{k}_n} a_{\vec{k}'_1}^\dagger \cdots a_{\vec{k}'_n}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{(j^{(1)}, \dots, j^{(n)}) \in P_n} (2\pi)^{3n} (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_{j^{(1)}}) \cdots \delta^{(3)}(\vec{k}'_n - \vec{k}_{j^{(n)}})) \tag{4.14}$$

en donde P_n son todas las permutaciones del conjunto $(1, 2, \dots, n)$. Para demostrar esto procederé por inducción, ya mostré que se satisface con $n = 3$, ahora supongo

que es válido para $n = m$ con m cualquier número entero positivo. Entonces,

$$\langle 0 | a_{\vec{k}_1}^- \cdots a_{\vec{k}_{m+1}}^- a_{\vec{k}'_1}^\dagger \cdots a_{\vec{k}'_{m+1}}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{r=1}^{m+1} (2\pi)^3 \langle 0 | \left(\prod_{l=1, l \neq r}^{m+1} a_{\vec{k}_l}^- \right) a_{\vec{k}'_1}^\dagger \cdots a_{\vec{k}'_m}^\dagger | 0 \rangle \delta^{(3)}(\vec{k}'_{m+1} - \vec{k}_r)$$

en donde, dentro de los brackets, hay m operadores de creación y m operadores de aniquilación. Entonces,

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_{\vec{k}_1}^- \cdots a_{\vec{k}_{m+1}}^- a_{\vec{k}'_1}^\dagger \cdots a_{\vec{k}'_{m+1}}^\dagger | 0 \rangle = \\ & \sum_{r=1}^{m+1} (2\pi)^3 \left(\sum_{(j^{(1)}, \dots, j^{(i)}, \dots, j^{(m+1)}) \in P_m, j^{(i)} \neq r} (2\pi)^{3m} (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_{j^{(1)}}) \cdots \delta^{(3)}(\vec{k}'_m - \vec{k}_{j^{(m+1)}})) \right) \delta^{(3)}(\vec{k}'_{m+1} - \vec{k}_r) \\ & = \sum_{(j^{(1)}, \dots, j^{(m+1)}) \in P_{m+1}} (2\pi)^{3(m+1)} (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_{j^{(1)}}) \cdots \delta^{(3)}(\vec{k}'_{m+1} - \vec{k}_{j^{(m+1)}})) \end{aligned}$$

en donde dentro $(j^{(1)}, \dots, j^{(i)}, \dots, j^{(m+1)}) \in P_m, j^{(i)} \neq r$ son todas las posibles permutaciones del conjunto $(1, 2, \dots, i, \dots, m+1), i \neq r$. Como el suponer válido para un m arbitrario significa que es válido para $m+1$ y ya mostré que es válido para $m=3$, entonces es válido para cualquier n . q.e.d.

Ahora veamos que sucede en el caso de operadores de aniquilación y creación de partículas fermiónicas. Para el caso en que hay más operadores de creación que de aniquilación, o viceversa, sucede lo mismo que en el caso de partículas escalares, pero en el caso de tener la misma cantidad de operadores de creación que de aniquilación, cada vez que se intercambia un operador de creación con uno de aniquilación, aparece un signo menos a causa de sus relaciones de anticonmutación, así que cada movimiento lo que hará es ir intercambiando de signos. Los $\delta^{(3)}()$ que aparecen en la ecuación (4.15) para la primera permutación $(1, 2, \dots, n)$ de izquierda a derecha, pueden verse como intercambios sucesivos, así que cada $\delta^{(3)}()$ va intercambiando de signo, con el primero siendo signo $+$. Ahora, si cada termino que se está sumando se escriben como

$$[(\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \dots), (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_2) \dots), (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_3) \dots) \cdots],$$

puede apreciarse que cada $\delta^{(3)}()$ al comienzo de cada termino también son movimientos sucesivos, por lo que, en el caso de los fermiones, cada $\delta^{(3)}()$ en las sumas va intercambiando signo, empezando con $+$. Entonces, el signo del primer término, si

es una permutación par de $(1, 2, 3, \dots, n) \in P_n$, es $(-1)^{n-1}$ para el caso de n par y $(-1)^{n-2}$ para n impar, por lo que si el primer término es una permutación par $\in P_n$, siempre llevará signo menos, una permutación después, es decir, una permutación impar, llevará signo más, después signo menos y así. Entonces se concluye que

$$\langle 0 | b_{\vec{k}_1} \cdots b_{\vec{k}_n} b_{\vec{k}'_1}^\dagger \cdots b_{\vec{k}'_n}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{(j^{(1)}, \dots, j^{(n)}) \in P_n} (-1)^\rho (2\pi)^{3n} (\delta^{(3)}(\vec{k}'_1 - \vec{k}_{j^{(1)}}) \cdots \delta^{(3)}(\vec{k}'_n - \vec{k}_{j^{(n)}})) \quad (4.15)$$

en donde $\rho = 1$ para permutaciones pares de $(j^{(1)}, \dots, j^{(n)})$ y $\rho = 2$ para permutaciones impares.

4.2.3. Primer término de la amplitud

Estoy interesado en encontrar

$$\lim_{t_\pm \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t_-, t_+) - I | i \rangle$$

pues el primer término es el correspondiente a no haber interacción. Entonces el primer término que calcularé es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(1)} &\stackrel{(4.10)}{=} -i\lambda \langle f | \int d^4x \hat{H}_I | i \rangle = -i\lambda \langle f | \int d^4x \bar{\psi}_I \phi_I \psi_I | i \rangle \\ &= -i\lambda \langle f | \int d^4x \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}_1}}} [b_{\vec{k}_1}^{s\dagger} \bar{u}^s(\vec{k}_1) e^{+ik_1 \cdot x} + c_{\vec{k}_1}^s \bar{v}^s(\vec{k}_1) e^{-ik_1 \cdot x}] \\ &\quad \left[\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}_2}}} a_{\vec{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right] \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}_3}}} [b_{\vec{k}_3}^r u^r(\vec{k}_3) e^{-ik_3 \cdot x} + c_{\vec{k}_3}^{r\dagger} v^r(\vec{k}_3) e^{ik_3 \cdot x}] | i \rangle. \end{aligned}$$

En todos los términos de esta multiplicación, el único término diferente de cero es el término que tiene a $c_{\vec{k}_1}^s$, $a_{\vec{k}_2}^\dagger$ y $b_{\vec{k}_3}^r$ pues todos los demás tendrían un número diferente de operadores de creación que de aniquilación. Operando únicamente estos operadores,

$$\begin{aligned} \langle f | c_{\vec{k}_1}^s a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_3}^r | i \rangle &= \sqrt{8E_{\vec{p}} E_{\vec{q}} E_{\vec{k}}} \langle 0 | a_{\vec{k}} a_{\vec{k}_2}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | c_{\vec{k}_1}^s c_{\vec{q}}^{s'\dagger} | 0 \rangle \langle 0 | b_{\vec{k}_3}^r b_{\vec{p}}^{r'\dagger} | 0 \rangle \\ &= \sqrt{8E_{\vec{p}} E_{\vec{q}} E_{\vec{k}}} (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}) (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_3 - \vec{p}) \delta^{rr'} (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 - \vec{q}) \delta^{ss'} \langle 0 | 0 \rangle \end{aligned}$$

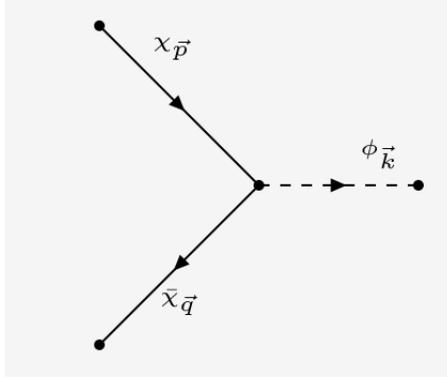


Figura 4.3. Diagrama de Feynman correspondiente a $\mathcal{A}_{(1)}$.

Usando estos $\delta()$ para integrar las dependencias de los momentos \vec{k}_1 , \vec{k}_2 y \vec{k}_3 ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{(1)} &= \lambda \sqrt{8E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}E_{\vec{k}}} \int d^4x \left[\frac{\bar{v}^{s'}(q)e^{-iq \cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \right] \left[\frac{e^{ik \cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \right] \left[\frac{u^{r'}e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \right] \\
 &= -i\lambda \int \bar{v}^{s'}(\vec{q})u^{r'}(\vec{p})e^{-ix \cdot (q+p-k)}d^4x = -i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(q+p-k)\bar{v}^{s'}(\vec{q})u^{r'}(\vec{p}) \\
 &= i(2\pi)^4\delta^{(4)}(q+p-k)\mathcal{A}_{(1)},
 \end{aligned}$$

utilizando $\mathcal{A}_{(1)} = -\lambda\bar{v}^{s'}(\vec{q})u^{r'}(\vec{p})$. Esta amplitud puede ser ilustrada utilizando el diagrama de Feynman mostrado en la figura 4.3. Corresponde a la aniquilación de una partícula fermiónica con una antipartícula en una partícula escalar sin la intervención de algún mediador. Esta amplitud sería la utilizada para calcular la sección eficaz sin la presencia de un potencial.

4.2.4. Segundo término de la amplitud

El término cuadrático de la interacción es igual a cero, pues todos los términos tendrán diferente número de operadores de aniquilación a_k que de creación a_k^\dagger . El siguiente término diferente de cero es el término cubico,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{(2)} &= \\
 &= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \langle f | \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 T(\bar{\psi}_I(x_1)\phi_I(x_1)\psi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\phi_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\phi_I(x_3)\psi_I(x_3)) | i \rangle.
 \end{aligned}$$

Centrándome únicamente en el término que está adentro de la integral, según el teorema de Wick,

$$\begin{aligned}
& \langle f | T(\bar{\psi}_I(x_1)\phi_I(x_1)\psi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\phi_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\phi_I(x_3)\psi_I(x_3)) | i \rangle = \\
& \langle f | : (\bar{\psi}_I(x_1)\phi_I(x_1)\psi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\phi_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\phi_I(x_3)\psi_I(x_3)) : + \\
& \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)} : \bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\psi_I(x_3)\phi_I(x_3) : + \\
& \overbrace{\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)} : \bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\psi_I(x_3)\phi_I(x_1) : + \\
& \overbrace{\bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_1)} : \phi_I(x_1)\bar{\psi}_I(x_2)\phi_I(x_2)\psi_I(x_2)\bar{\psi}_I(x_3)\phi_I(x_3)\psi_I(x_3) : + \cdots + \\
& \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_3)} \overbrace{\bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_2)} \overbrace{\bar{\psi}_I(x_2)\psi_I(x_1)} : \phi_I(x_2)\psi_I(x_3)\psi_I(x_3) : + \cdots | i \rangle
\end{aligned} \tag{4.16}$$

En esta expresión, hay muchos términos que son iguales a cero. Primero, todos los términos que contengan un número diferente de operadores de creación que de aniquilación son cero. Ahora, tomemos como ejemplo el término

$$\begin{aligned}
& \sqrt{8E_{\vec{r}}E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}\langle 0 | a_{\vec{r}} : c_{\vec{k}_1}^{s_1} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_3}^{s_2} c_{\vec{k}_4}^{s_3} b_{\vec{k}_5}^{s_4} b_{\vec{k}_6}^{\dagger s_5} c_{\vec{k}_7}^{\dagger s_6} : b_{\vec{p}}^{s'\dagger} c_{\vec{q}}^{r'\dagger} | 0 \rangle \overbrace{\phi_I(x_2)\phi_I(x_2)} \\
& = \sqrt{8E_{\vec{r}}E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}\langle 0 | a_{\vec{r}} a_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_6}^{\dagger s_5} c_{\vec{k}_7}^{\dagger s_6} c_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_3}^{s_2} c_{\vec{k}_4}^{s_3} b_{\vec{k}_5}^{s_4} b_{\vec{p}}^{s'\dagger} c_{\vec{q}}^{r'\dagger} | 0 \rangle \overbrace{\phi_I(x_2)\phi_I(x_2)} \\
& = \sqrt{8E_{\vec{r}}E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{r}) \langle 0 | b_{\vec{k}_6}^{\dagger s_5} c_{\vec{k}_7}^{\dagger s_6} c_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_3}^{s_2} c_{\vec{k}_4}^{s_3} b_{\vec{k}_5}^{s_4} b_{\vec{p}}^{s'\dagger} c_{\vec{q}}^{r'\dagger} | 0 \rangle \overbrace{\phi_I(x_2)\phi_I(x_2)} = 0
\end{aligned}$$

este resultado muestra que, los términos que son diferentes de cero son aquellos que no tienen operadores de creación dentro del orden normal. Junto con el requerimiento de que haya la misma cantidad de operadores de creación que de aniquilación, los únicos términos diferentes de cero son en los que se contraen dos campos escalares y cuatro campos fermiónicos, como el mostrado en la última línea de (4.16). Hay muchas diferentes contracciones, de hecho, hay 3 contracciones posibles entre los campos escalares y 18 contracciones entre los campos fermiónicos, un total de 54 términos diferentes de cero. El punto clave aquí es que solo 6 de esos términos representan una interacción que no se componga de diagramas separados y cerrados, como los que se muestran en las figuras 4.4 y 4.5.

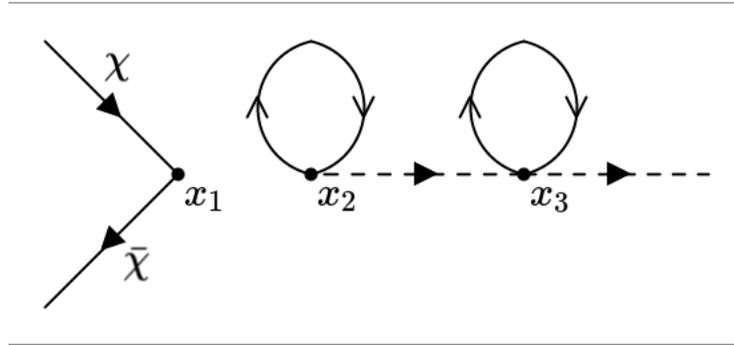


Figura 4.4. Diagrama de Feynman para el término $\phi_I(x_3)\bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_1)C(\bar{\psi}_I(x_2)\psi_I(x_2))C(\bar{\psi}_I(x_3)\psi_I(x_3))C(\phi_I(x_2)\phi_I(x_3))$.

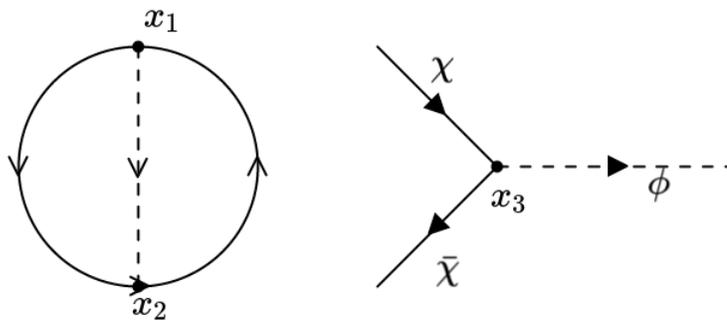


Figura 4.5. Diagrama de Feynman para el término $\phi_I(x_3)\bar{\psi}_I(x_3)\psi_I(x_3)C(\bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_2))C(\bar{\psi}_I(x_2)\psi_I(x_1))C(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2))$.

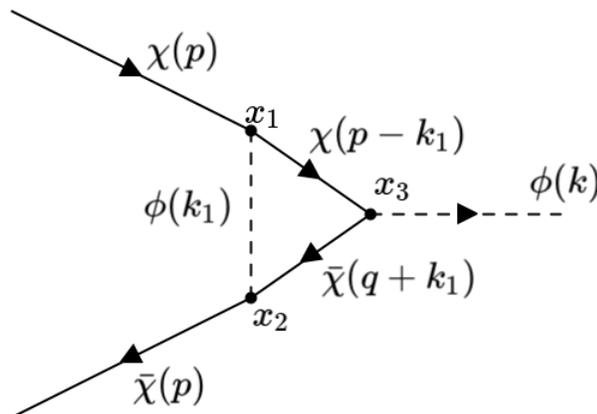


Figura 4.6. Diagrama de Feynman para el término $\bar{\psi}_I(x_2)\phi_I(x_3)\psi_I(x_1)C(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2))C(\bar{\psi}_I(x_1)\psi_I(x_3))C(\bar{\psi}_I(x_3)\psi_I(x_2))$.

Realizando el procedimiento para uno de esos 6 términos,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{(2)}^{(I)} \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \langle f | \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 : \bar{\psi}_I(x_2) \phi_I(x_3) \psi_I(x_1) \overbrace{\phi_I(x_1) \phi_I(x_2)} \overbrace{\bar{\psi}_I(x_1) \psi_I(x_3)} \overbrace{\bar{\psi}_I(x_3) \psi_I(x_2)} : | i \rangle \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \sqrt{8E_{\vec{p}} E_{\vec{q}} E_{\vec{k}}} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \langle 0 | a_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{k}_1}}} c_{\vec{k}_1}^s \bar{v}^s(\vec{k}_1) e^{-ik_1 \cdot x_2} \\
& \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{k}_2}}} b_{\vec{k}_2}^r u^r(\vec{k}_2) e^{-ik_2 \cdot x_1} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{k}_3}}} a_{\vec{k}_3}^\dagger \overbrace{\dots} \overbrace{\dots} \overbrace{\dots} c_{\vec{q}}^{s'\dagger} b_{\vec{p}}^{r'\dagger} | 0 \rangle \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \frac{\sqrt{8E_{\vec{p}} E_{\vec{q}} E_{\vec{k}}}}{\sqrt{8E_{\vec{k}_1} E_{\vec{k}_2} E_{\vec{k}_3}}} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \int d^3k_1 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{q}) \bar{v}^{s'}(\vec{k}_1) e^{-ik_1 \cdot x_2} \\
& \int d^3k_2 \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{p}) u^{r'}(\vec{k}_2) e^{-ik_2 \cdot x_1} \int d^3k_3 \delta^{(3)}(\vec{k}_3 - \vec{k}) e^{ik_3 \cdot x_3} \overbrace{\dots} \overbrace{\dots} \overbrace{\dots} \\
&\stackrel{(4.11)}{=} \frac{(-i\lambda)^3}{6} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 [\bar{v}^{s'}(\vec{q}) e^{-iq \cdot x_2}] [u^{r'} e^{-ip \cdot x_1}] [e^{ik \cdot x_3}] \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik_1(x_2-x_1)}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \\
& \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} ie^{-ik_2(x_3-x_1)} \frac{\gamma \cdot k_2 + M}{k_2^2 - M^2 + i\epsilon_2} \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} ie^{-ik_3(x_3-x_2)} \frac{\gamma \cdot k_3 + M}{k_3^2 - M^2 + i\epsilon_3} \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \int \frac{d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \frac{e^{-ix_2 \cdot (q+k_1-k_3)} e^{-ix_1 \cdot (p-k_1-k_2)} e^{-ix_3 \cdot (k_2+k_3-k)}}{(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)(k_2^2 - M^2 + i\epsilon_2)(k_3^2 - M^2 + i\epsilon_3)} \\
& \bar{v}^{s'}(\vec{q}) [\gamma \cdot k_2 + M] [\gamma \cdot k_3 + M] u^{r'}(\vec{p}) \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \frac{\delta^{(4)}(q+k_1-k_3) \delta^{(4)}(p-k_1-k_2) \delta^{(4)}(k_2+k_3-k)}{(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)(k_2^2 - M^2 + i\epsilon_2)(k_3^2 - M^2 + i\epsilon_3)} \\
& \bar{v}^{s'}(\vec{q}) [\gamma \cdot k_2 + M] [\gamma \cdot k_3 + M] u^{r'}(\vec{p}) \\
&= \frac{(-i\lambda)^3}{6} \delta^{(4)}(p+q-k) \int d^4k_1 \frac{\bar{v}^{s'}(\vec{q}) [\gamma \cdot (p-k_1) + M] [\gamma \cdot (q+k_1) + M] u^{r'}(\vec{p})}{[(p-k_1)^2 - M^2 + i\epsilon][k_1^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q+k_1)^2 - M^2 + i\epsilon_3]}.
\end{aligned}$$

El diagrama de este término se mira en la figura 4.6. Los otros cinco términos son permutaciones del mismo diagrama, por lo que

$$\mathcal{M}_{(2)} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-k) \mathcal{A}_{(2)}.$$

con

$$\mathcal{A}_{(2)} = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \lambda^3 \frac{\bar{v}^{s'}(\vec{q}) [\gamma \cdot (p-k_1) + M] [\gamma \cdot (q+k_1) + M] u^{r'}(\vec{p})}{[(p-k_1)^2 - M^2 + i\epsilon][k_1^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q+k_1)^2 - M^2 + i\epsilon_3]}$$

Este será el último término de la amplitud que calcularé. Ahora procederé a citar las reglas de Feynman, reglas con las que, sabiendo el diagrama de la interacción,

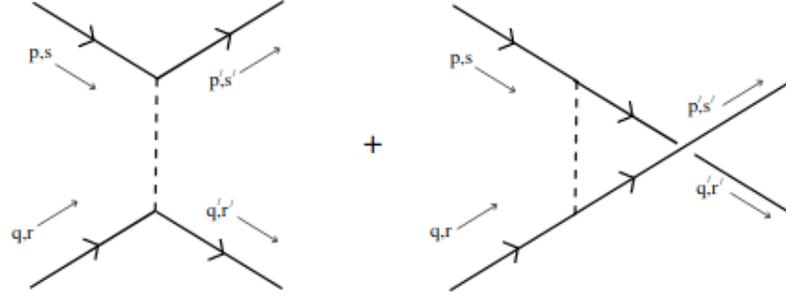


Figura 4.7. Diagramas de Feynman correspondientes al término de orden 2 de la expansión (4.10) para una interacción de dos Fermiones a dos Fermiones [23].

se puede escribir el término de la amplitud \mathcal{A} [23].

Para cada fermión entrante con momento p y espín r se asocia un espinor $u^r(p)$, para cada fermión saliente un espinor $\bar{u}^r(p)$. Para antifermiones entrantes o salientes se les asocia espinores $\bar{v}^r(p)$ y $v^r(p)$ respectivamente. A cada vértice se le asocia un término $i\lambda$, cada línea interna se le agrega un término

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

para escalares y

$$\frac{i(\gamma^\mu p_\mu + M)}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

para fermiones. Imponer conservación del momento e integrar sobre momentos indeterminados [23]. Estas son las reglas de Feynman, por medio de las cuales se puede obtener el término de la amplitud para una interacción en donde se conoce el diagrama de Feynman. Por ejemplo, la amplitud correspondiente a los diagramas mostrados en la figura 4.7, diagramas de los términos de orden dos de la expansión (4.10) para el caso de dos partículas fermiónicas a dos partículas fermiónicas, es

$$\mathcal{A} = (-i\lambda)^2 \left(\frac{[\bar{u}^{s'}(\vec{p}')u^s(\vec{p})][\bar{u}^{r'}(\vec{q}')u^r(\vec{q})]}{(p-p')^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{[\bar{u}^{s'}(\vec{p}')u^r(\vec{q})][\bar{u}^{r'}(\vec{q}')u^s(\vec{p})]}{(p-q')^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \quad (4.17)$$

5. Análisis del Efecto Sommerfeld y limite no relativista

En el capítulo anterior se realizó el procedimiento para obtener los primeros dos términos de la amplitud \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , el primer término corresponde a la amplitud de la aniquilación de dos partículas de materia oscura fermiónica sin la presencia de partículas mediadoras, el segundo término es el primer término de la amplitud en el caso de haberlas. En este capítulo se analizará cómo se ve modificada la sección eficaz con la intervención de este segundo término, encontrando al factor del efecto Sommerfeld, además se encontrará la forma del potencial en el límite no relativista.

5.1. Análisis del efecto Sommerfeld

5.1.1. Cálculo del cuadrado de las amplitudes

La probabilidad de que la interacción suceda es proporcional al cuadrado de la amplitud,

$$P_{(if)} \propto \left(\lim_{\pm \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t_-, t_+) | i \rangle \right)^2 = \mathcal{M}^2 \propto \mathcal{A}^2$$

y a su vez, la sección eficaz media es proporcional a esta probabilidad,

$$\bar{\sigma} \propto \bar{\mathcal{A}}^2.$$

Ya que $\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2$ representa la amplitud sin un potencial,

$$S = \frac{\bar{\mathcal{A}}^2}{\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2}$$

en donde

$$\mathcal{A} = \sum_i \mathcal{A}_{(i)}.$$

5.1.2. Cálculo de $\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2$ y $\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2$

En el capítulo anterior se vió que $\mathcal{A}_{(1)} = -\lambda \bar{v}^{s'}(\vec{q}) u^{r'}(\vec{p})$, por lo que $\mathcal{A}_{(1)}^2 = [-\lambda \bar{v}^{s'}(\vec{q}) u^{r'}(\vec{p})][-\lambda \bar{v}^{s'}(\vec{q}) u^{r'}(\vec{p})]^*$, pero el término que me interesa calcular es el promedio de todas las posibles configuraciones en que suceda la interacción, es decir,

$$\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2 = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 [\bar{v}^s(\vec{q}) u^r(\vec{p})][\bar{v}^s(\vec{q}) u^r(\vec{p})]^*.$$

De igual forma,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = & \frac{\lambda^6}{4} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \sum_{s,r=1}^2 \left(\frac{\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma \cdot (p - k_1) + M][\gamma \cdot (q + k_1) + M] u^r(\vec{p})}{[(p - k_1)^2 - M^2 + i\epsilon][k_1^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q + k_1)^2 - M^2 + i\epsilon_3]} \right) \\ & \left(\frac{\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma \cdot (p - k_2) + M][\gamma \cdot (q + k_2) + M] u^r(\vec{p})}{[(p - k_2)^2 - M^2 + i\epsilon][k_2^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q + k_2)^2 - M^2 + i\epsilon_3]} \right)^*. \end{aligned}$$

Para simplificar estas expresiones, utilizaré las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} Tr(I) &= 4 \\ Tr(\gamma_\mu a^\mu) &= 0 \\ Tr(\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu) &= 4a \cdot b \\ Tr(\gamma_{\mu_1} a^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} b^{\mu_2} \gamma_{\mu_3} c^{\mu_3}) &= 0 \\ Tr(\gamma_{\mu_1} a^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} b^{\mu_2} \gamma_{\mu_3} c^{\mu_3} \gamma_{\mu_4} d^{\mu_4}) &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)], \end{aligned} \tag{5.1}$$

en donde $Tr(A)$ es la traza de la matriz A e I es la matriz identidad de 4×4 [11].

Al igual que esas identidades, se puede demostrar

$$\begin{aligned} Tr(\gamma_{\mu_1} a^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} b^{\mu_2} \gamma_{\mu_3} c^{\mu_3} \gamma_{\mu_4} d^{\mu_4} \gamma_{\mu_5} e^{\mu_5} \gamma_{\mu_6} f^{\mu_6}) &= (a \cdot b)[(e \cdot f)(c \cdot d) - (d \cdot f)(c \cdot e) + (c \cdot f)(d \cdot e)] \\ &- (a \cdot c)[(b \cdot f)(d \cdot e) - (d \cdot f)(b \cdot e) + (e \cdot f)(b \cdot d)] + (a \cdot d)[(b \cdot f)(c \cdot e) - (c \cdot f)(b \cdot e) + (e \cdot f)(b \cdot c)] \\ &- (a \cdot e)[(b \cdot f)(c \cdot d) - (b \cdot d)(c \cdot f) + (b \cdot c)(d \cdot e)] + (a \cdot f)[(b \cdot e)(c \cdot d) - (b \cdot d)(c \cdot e) + (b \cdot c)(d \cdot e)] \end{aligned}$$

Tomando en cuenta estas identidades,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2 &= \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 [\bar{v}^s(\vec{q})u^r(\vec{p})][\bar{v}^s(\vec{q})u^r(\vec{p})]^* = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 [\bar{v}^s(\vec{q})u^r(\vec{p})][\bar{v}^s(\vec{q})u^r(\vec{p})]^\dagger \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 [\bar{v}^s(\vec{q})u^r(\vec{p})][\bar{u}^r(\vec{p})v^s(\vec{q})] = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 \bar{v}^s(\vec{q})_\mu u^r(\vec{p})^\mu \bar{u}^r(\vec{p})_\nu v^s(\vec{q})^\nu \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \sum_{r,s=1}^2 v^s(\vec{q})^\nu \bar{v}^s(\vec{q})_\mu u^r(\vec{p})^\mu \bar{u}^r(\vec{p})_\nu \stackrel{(4.6)}{=} \frac{\lambda^2}{4} (\gamma^\alpha q_\alpha - M)_\mu^\nu (\gamma^\beta p_\beta + M)_\nu^\mu \\
&= \frac{\lambda^2}{4} Tr[(\gamma^\alpha q_\alpha - M)(\gamma^\beta p_\beta + M)] \\
&= \frac{\lambda^2}{4} [Tr(\gamma^\alpha q_\alpha \gamma^\beta p_\beta) + MTr(\gamma^\alpha q_\alpha) - MTr(\gamma^\beta p_\beta) - M^2 Tr(I)] \\
&\stackrel{(5.1)}{=} \lambda^2(p \cdot q - M^2).
\end{aligned}$$

Ahora, en el eje de coordenadas del centro de masa, en donde $p^0 = q^0$ y $p^i = -q^i$, se obtiene que para velocidades pequeñas, en donde $p^0 \approx M(1 + v^2/2)$, $p^3 \approx mv$,

$$\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2 \sim v^4.$$

Para simplificar $\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2$, empezaré simplificando lo que está adentro de la integral, simplificando primero el numerador N ,

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{s,r=1}^2 (\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M][\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]u^r(\vec{p})) \\
& (\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma^{\mu_1}(p-k_2)_{\mu_1} + M][\gamma^{\mu_2}(q+k_2)_{\mu_2} + M]u^r(\vec{p}))^\dagger \\
& \stackrel{(4.4)}{=} \sum_{s,r=1}^2 (\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M][\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]u^r(\vec{p})) \\
& (u^{r\dagger}(\vec{p})\gamma^0[\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M]\gamma^0\gamma^0[\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M]\gamma^0\gamma^0v^s(\vec{q})) \\
& \stackrel{(4.4)}{=} \sum_{s,r=1}^2 (\bar{v}^s(\vec{q})[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M][\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]u^r(\vec{p})) \\
& (\bar{u}^r(\vec{p})[\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M][\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M]v^s(\vec{q})) \\
& = \sum_{s,r=1}^2 \bar{v}^s(\vec{q})_{\nu_1}[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M]_{\nu_2}^{\nu_1}[\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]_{\nu_3}^{\nu_2}u^r(\vec{p})^{\nu_3} \\
& \bar{u}^r(\vec{p})_{\nu_4}[\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M]_{\nu_5}^{\nu_4}[\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M]_{\nu_6}^{\nu_5}v^s(\vec{q})^{\nu_6} \\
& = \sum_{s,r=1}^2 v^s(\vec{q})^{\nu_6}\bar{v}^s(\vec{q})_{\nu_1}[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M]_{\nu_2}^{\nu_1}[\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]_{\nu_3}^{\nu_2} \\
& u^r(\vec{p})^{\nu_3}\bar{u}^r(\vec{p})_{\nu_4}[\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M]_{\nu_5}^{\nu_4}[\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M]_{\nu_6}^{\nu_5} \\
& = [\gamma^\alpha q_\alpha - M]_{\nu_1}^{\nu_6}[\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M]_{\nu_2}^{\nu_1}[\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M]_{\nu_3}^{\nu_2} \\
& [\gamma^\beta p_\beta + M]_{\nu_4}^{\nu_3}[\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M]_{\nu_5}^{\nu_4}[\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M]_{\nu_6}^{\nu_5} \\
& = Tr([\gamma^\alpha q_\alpha - M][\gamma^{\mu_1}(p-k_1)_{\mu_1} + M][\gamma^{\mu_2}(q+k_1)_{\mu_2} + M] \\
& [\gamma^\beta p_\beta + M][\gamma^{\mu_4}(q+k_2)_{\mu_4} + M][\gamma^{\mu_3}(p-k_2)_{\mu_3} + M])
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Con esta expresi3n en mente, para proceder, se puede realizar cada una de las integrales por separado, notando que al realizar la integral sobre k_1 , k_2 se toma como constante y viceversa. Tambi3n hay que notar que, en el numerador, la dependencia sobre k_1 est1a dada por

$$N = a''\gamma^{\mu_i}k_{1\mu_i}\gamma^{\mu_j}k_{1\mu_j} + b'\gamma^{\mu_i}k_{1\mu_i} + c' \stackrel{(5.1)}{=} a'k_1^2 + b'\gamma^{\mu_i}k_{1\mu_i} + c',$$

en donde a' , b' y c' son variables que dependen de k_2 , p , q y M . Con esto, la integral sobre k_1 es

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = \frac{\lambda^6}{4} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{a'k_1^2 + b'\gamma^{\mu_i}k_{1\mu_i} + c'}{[(p-k_1)^2 - M^2 + i\epsilon][k_1^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q+k_1)^2 - M^2 + i\epsilon_3]}.$$

Utilizando la identidad

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz \frac{\delta(1-x-y-z)}{Ax + By + Cz}$$

se llega a la expresión

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = \frac{\lambda^6}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 d^3 x \frac{[a'k_1^2 + b'\gamma^{\mu i} k_{1\mu i} + c']\delta(1-x-y-z)}{[(p-k_1)^2 - M^2 + i\epsilon]x + [k_1^2 - m^2 + i\epsilon_2]y + [(q+k_1)^2 - M^2 + i\epsilon_3]z}$$

Ahora se puede realizar el cambio de variables $\Delta = m^2 y + (xp - zq)^2$ y $l^\mu = k_1^\mu + xp^\mu - zq^\mu$, obteniendo

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = \frac{\lambda^6}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 d^3 x \frac{[a'k_1^2 + b'\gamma^{\mu i} k_{1\mu i} + c']\delta(1-x-y-z)}{l^2 - \Delta + i\epsilon}$$

y realizando una rotación de Wick $l^0 \rightarrow il^0$, $l^T = (l^0, l^i) \rightarrow l_{Euclideo}^T = l_E^T = (l^i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Con esta rotación, ahora el vector l_E se comporta como un vector en un espacio Euclídeo de 4 dimensiones, $l_E^2 = -(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)$. Las ventajas de este procedimiento se hacen evidente rápidamente, primero, se puede reemplazar el elemento de volumen $d^4 k$ por $id^4 l_E$ en donde $d^4 l_E$ se comporta como un elemento de volumen en un espacio Euclídeo. Con este cambio de variable se obtiene

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = \frac{i\lambda^6}{2} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 d^3 x \frac{[al_E^2 + b\gamma^{\mu i} l_{E\mu i} + c]\delta(1-x-y-z)}{l_E^2 - \Delta + i\epsilon}$$

con a, b y c proporcionales a x, y, z, p, q, k_2 y M . Esta integral sobre l_E es posible realizarla cambiando a coordenadas esféricas,

$$l_1 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$l_2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$l_3 = r \cos \theta_2 \sin \theta_3$$

$$l_4 = r \cos \theta_3$$

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$$

y notando que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + \Delta - i\epsilon} dx = 0$$

por lo que los términos lineales en r se hacen cero, se obtiene

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 = \frac{-i\lambda^6}{2} \int \frac{\partial(l_1, l_2, l_3, l_4)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} \frac{dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{(2\pi)^4} \int_0^1 d^3x \frac{[-ar^2 + c]\delta(1-x-y-z)}{r^2 + \Delta - i\epsilon}$$

en donde $\partial(l_1, l_2, l_3, l_4)/\partial(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r^2 \sin \theta_3^2 \sin \theta_2$ es el Jacobiano de la transformación. Las integrales con dependencia angular devuelven

$$\int_0^\pi d\theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 \sin \theta_3^2 \sin \theta_2 = 2\pi^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 &= \frac{-i\lambda^6}{8(2\pi)^2} \int_0^1 d^3x \delta(1-x-y-z) \int r^2 d(r^2) \frac{[-ar^2 + c]}{r^2 + \Delta - i\epsilon} \\ &= \frac{-i\lambda^6}{8(2\pi)^2} \int_0^1 d^3x \delta(1-x-y-z) \left[\lim_{\rho \rightarrow \infty} -a \log \left(\frac{\rho + \Delta - i\epsilon}{\Delta - i\epsilon} \right) - \frac{3}{2}a - \frac{c}{2(\Delta - i\epsilon)} \right]. \end{aligned}$$

Ahora se puede encontrar el valor de a y c . Primero se escribe la expresión (5.2) en términos de potencias de $k_1^0, k_1^1, k_1^2, k_1^3$, después se hace la sustitución $l^\mu = k_1^\mu + xp^\mu - zq^\mu$. Posteriormente se hace la rotación de Wick $l_E^4 = -il^0$. Una vez con esta expresión, se hacen cero todos los términos lineales en l_E^1, l_E^2, l_E^3 y l_E^4 , y se factoriza L_E^2 . El término que acompaña a L_E^2 es $-a$ y el término que queda es b . Al trabajar en el centro de masa, en donde $p^0 = q^0$, $p^i = -p^i$ y suponiendo que se mueven originalmente en el eje z , es decir $p^1 = p^2 = 0$, se obtienen los valores de a y de c dependientes de $x, y, z, p^0, p^3, k_2^0, k_2^1, k_2^2, k_2^3$ y M .

Ahora, $a = a_1$ y $c = a_2$, de forma equivalente al procedimiento anteriormente

descrito, se puede escribir como

$$\begin{aligned}
a_i &= \int d^4 k_2 \frac{e'_i k_2^2 + f'_i k_2 + g'_i}{[(p - k_2)^2 - M^2 + i\epsilon][k_2^2 - m^2 + i\epsilon_2][(q + k_2)^2 - M^2 + i\epsilon_3]^*} \\
&= 2 \int d^4 k_2 \int_0^1 d^3 x \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)[e'_i k_2^2 + f'_i k_2 + g_i]}{x_1[(p - k_2)^2 - M^2 + i\epsilon]^* + x_2[k_2^2 - m^2 + i\epsilon_2]^* + x_3[(q + k_2)^2 - M^2 + i\epsilon_3]^*} \\
&= 2i \int d^4 l_E \int_0^1 d^3 x \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)[e_i l_E^2 + f_i l_E + g_i]}{l_E^2 - \Delta_2 - i\epsilon} \\
&= -2i \int_0^1 d^3 x \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) 2\pi^2 \int \frac{r^2}{2} d(r^2) \frac{-e_i r^2 + g_i}{r^2 + \Delta_2 + i\epsilon} \\
&= -2\pi^2 i \int_0^1 d^3 x \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) \left[\lim_{\rho \rightarrow \infty} -e_i \log \left(\frac{\rho + \Delta_2 + i\epsilon}{\Delta_2 + i\epsilon} \right) - \frac{3}{2} e_i - \frac{g_i}{2(\Delta_2 + i\epsilon)} \right]
\end{aligned}$$

Utilizando esta expresión para los a_i , la amplitud resultante es

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 &= \frac{i\lambda^6}{8(2\pi)^2} \int_0^1 d^3 x \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) \int_0^1 d^3 y \delta(1 - y_1 - y_2 - y_3) 2\pi^2 i B, \\
B &= \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\rho_1 + \Delta_1 - i\epsilon}{\Delta_1 - i\epsilon} + \frac{3}{2} \right) \left(\lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\rho_2 + \Delta_2 + i\epsilon}{\Delta_2 + i\epsilon} + \frac{3}{2} \right) e_1 + \frac{g_1}{2(\Delta_2 + i\epsilon)} \right) + \\
&\quad \frac{1}{2(\Delta_1 - i\epsilon)} \left(\lim_{\rho_3 \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\rho_3 + \Delta_2 + i\epsilon}{\Delta_2 + i\epsilon} + \frac{3}{2} \right) e_2 + \frac{g_2}{2(\Delta_2 + i\epsilon)} \right)
\end{aligned}$$

en donde $\Delta_1 = m^2 x_2 + (x_1 p - x_3 q)^2$ y $\Delta_2 = m^2 y_2 + (y_1 p - y_3 q)^2$, y los términos e_1 , g_1 , e_2 y g_2 dependen de $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, p, q$ y M . Un comentario antes de continuar, hay que notar que el término en el logaritmo diverge para $\rho_i \rightarrow \infty$, esta divergencia es un ejemplo de las divergencias ultravioletas, cuya interpretación se da con temas de renormalización. Para el presente trabajo no tomaré en cuenta dichas divergencias. Encontrando a e_1, e_2, g_1 y g_2 (ver Anexo A) y enfocándome únicamente en la dependencia de v , después de hacer el límite para velocidades pequeñas $p^0 \approx M(1 + v^2/2)$, $p^3 \approx mv$, se obtiene,

$$e_1 \sim v^4$$

$$g_1 \sim v^8$$

$$e_2 \sim v^8$$

$$g_2 \sim v^{12}$$

y sabiendo que $\Delta \sim v^4$, se tiene que

$$\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2 \sim v^4 \log\left(\frac{1}{v^4} + 1\right) \log\left(\frac{1}{v^4} + 1\right).$$

Por otro lado, se obtuvo que $\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2 \sim v^4$, por lo que

$$\frac{\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2}{\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2} \sim \log\left(\frac{1}{v^4} + 1\right) \log\left(\frac{1}{v^4} + 1\right).$$

Mostrando que $\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2$ crece más rápido que $\bar{\mathcal{A}}_{(1)}^2$ cuando v tiende a cero, por lo que no se pueden utilizar solamente los primeros términos en la expansión perturbativa. Para v grande, este término no tiene dependencia en la velocidad. Para conocer la dependencia de S sobre la velocidad, habría que realizar un procedimiento similar para todas las ramas de la interacción y no solo para la rama que se estudió en el presente apartado. Por eso, debido a la incapacidad para utilizar mecánica cuántica relativista para estudiar este efecto, se procede a realizar el análisis utilizando mecánica cuántica no relativista.

5.2. Límite no relativista

5.2.1. Teoría de perturbaciones no relativista

En mecánica cuántica no relativista el estado de una partícula es representado por un elemento del espacio de Hilbert $|\phi(t)\rangle$, la dependencia temporal del estado está dado por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d|\phi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\phi(t)\rangle$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano. Si \hat{H} es independiente del tiempo, la solución puede escribirse como

$$|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t_0, t) |\psi(t_0)\rangle$$

en donde $\hat{U}(t_0, t)$ es el propagador, un operador unitario que cumple $\hat{U}(t_0, t_0) = I$, $\hat{U}(t_0, t_2)\hat{U}(t_2, t) = \hat{U}(t_0, t)$.

$\hat{U}(t_0, t)$ se puede escribir en términos de los autovalores normalizados de \hat{H} ,

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle$$

de la forma

$$\hat{U}(t_0, t) = \sum_E |E\rangle \langle E| e^{-iE(t-t_0)}$$

en donde se está suponiendo que no hay degeneración en los autovalores y los estados estan normalizados, es decir,

$$\langle x|E_n\rangle = \phi_n(x), \langle E_m|E_n\rangle = \int_V \langle E_m|x\rangle \langle x|E_n\rangle d^3x = \int_V \phi_m(x)^* \phi_n(x) d^3x = \delta_{mn},$$

de tal forma que [20]

$$|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t_0, t) |\phi(t_0)\rangle = \sum_E |E\rangle \langle E|\phi(t_0)\rangle e^{-iE(t-t_0)} = \sum_n a(t_0) |E_n\rangle e^{-iE_n(t-t_0)}.$$

El problema que intenta resolver teoría de perturbaciones es el caso

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$$

con $\hat{V}(t)$ una pequeña perturbación al Hamiltoniano \hat{H}_0 dependiente del tiempo. La idea para resolverlo es escribir

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |E_n\rangle e^{-iE_n(t-t_0)}$$

en donde ahora $a(t)$ es un coeficiente que depende del tiempo. Sustituyendo esa expresión en la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \sum_i a_i(t) |E_i\rangle e^{-iE_i(t-t_0)} &= (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \sum_i a_i(t) |E_i\rangle e^{-iE_i(t-t_0)} \\ (i \sum_i \frac{da_i(t)}{dt} |E_i\rangle + E_i \sum_i a_i(t) |E_i\rangle) e^{-iE_i(t-t_0)} &= (\sum_i E_i a_i(t) |E_i\rangle + \hat{V}(t) \sum_i a_i(t) |E_i\rangle) e^{-iE_i(t-t_0)} \\ i \sum_i \frac{da_i(t)}{dt} |E_i\rangle e^{-iE_i(t-t_0)} &= \hat{V}(t) \sum_i a_i(t) |E_i\rangle e^{-iE_i(t-t_0)} \end{aligned}$$

multiplicando por $\langle E_f |$ en ambos lados y usando $\langle E_m | E_n \rangle = \delta_{mn}$,

$$\begin{aligned}
i \sum_i \frac{da_i(t)}{dt} \langle E_f | E_i \rangle e^{-iE_i(t-t_0)} &= \sum_i a_i(t) \langle E_f | \hat{V}(t) | E_i \rangle e^{-iE_i(t-t_0)} \\
i \frac{da_f(t)}{dt} e^{-iE_f(t-t_0)} &= \sum_i a_i(t) \langle E_f | \hat{V}(t) | E_i \rangle e^{-iE_i(t-t_0)} \\
a_f(t) &= -i \int dt \sum_i a_i(t) \langle E_f | \hat{V}(t) | E_i \rangle e^{-i(E_i-E_f)(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

en donde

$$\langle E_f | \hat{V}(t) | E_i \rangle = \int d^3x \phi_f(x)^* \hat{V}(t) \phi_i(x).$$

Como primera aproximación se puede tomar el caso en el que no hay perturbación, es decir, $a_0(t) = cte$, $a_i = 0$ con $i \neq 0$. El valor de la constante se encontraría por normalización, así que bien puede tomarse $a_0(t) = 1$. a_f se obtiene al sustituir $a_0(t)$ en (5.3), es decir,

$$a_f^1(t) = -i \int d^4x \phi_f^* \hat{V}(t) \phi_i e^{-i(E_i-E_f)(t)}$$

en donde se tomó a $t_0 = 0$. Esa expresión sería una aproximación para $V(t)$ muy pequeño. Una mejor aproximación es utilizar $a_f^1(f)$ en (5.3),

$$a_f^2(t) = a_f^1(t) - i \int d^4x \sum_{n \neq i} a_n^1(t) \phi_f^* \hat{V}(t) \phi_n e^{-i(E_n-E_f)(t)}$$

y de esa forma, se podría seguir obteniendo mejores aproximaciones para $a(t)$, sustituyendo la aproximación anterior en (5.3) [20]. Con esta aproximación para las a_i , se tiene

$$\langle \phi(t) | U(t, t_0) | \phi(t_0) \rangle = \langle \phi(t) | (|\phi(t_0)\rangle e^{-iE_i(t-t_0)} + a_f^1(t) |\phi(t)\rangle e^{-iE_f(t-t_0)}) = a_f^1(t) e^{-iE_f(t-t_0)}$$

con lo que se observa que $a_f^1(t)$ juega el papel de \mathcal{M} para mecánica cuántica no relativista, en donde $V(t)$ es el potencial. Si el potencial es independiente del tiempo,

$$a_f^1(x) = -i4\pi\delta(E_f - E_i) \int d^3x \phi_f^* V(x) \phi_i$$

y sustituyendo $\phi_i = e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{x}}$, $\phi_f = e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{x}}$, se llega a la expresión

$$a_f^1(x) = -i4\pi\delta(E_f - E_i) \int d^3x V(\vec{x}) e^{-i(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x}},$$

en donde el papel de \mathcal{A} en esta expresión lo juega el término

$$\mathcal{A} = - \int d^3x V(\vec{x}) e^{-i(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x}}$$

el cual se quiere comparar con la amplitud (4.17). Si solo se toma en cuenta uno de los diagramas,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (-i\lambda)^2 \frac{[\bar{u}^{s'}(\vec{p}') u^s(\vec{p})][\bar{u}^{r'}(\vec{q}') u^r(\vec{q})]}{(p - p')^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -\lambda^2 (2M) \frac{\delta^{s's} \delta^{r'r}}{(p - p')^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned}$$

cuyo término, para el límite no relativista en donde $p^0 \approx p'^0 \approx M$, es igual a

$$\mathcal{A} = \lambda^2 (2M)^2 \frac{\delta^{s's} \delta^{r'r}}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2}.$$

Igualando, se obtiene

$$\int d^3x V(\vec{x}) e^{-i(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x}} = \frac{-B}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2}$$

con $B = \lambda^2 \delta^{s's} \delta^{r'r}$. La división por $(2M)^2$ está ahí pues al calcular la amplitud utilizando teoría cuántica de campos, se utilizó una normalización igual a $2M$ mientras que en la deducción proveniente de mecánica cuántica no relativista no se utilizó esta normalización. Realizando la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación, se llega a

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{-B}{p^2 + m^2} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{-B}{4\pi|\vec{x}|} e^{-m|\vec{x}|}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

El potencial (5.4) tiene el nombre de potencial de Yukawa. Este resultado dice que la interacción entre dos partículas fermiónicas por medio de un mediador escalar puede ser descrita en el límite no relativista como la interacción entre dos partículas por medio de un potencial de Yukawa. En el siguiente capítulo estudiaré la solución a la ecuación de Schrödinger para la interacción entre dos partículas a través de este potencial.

6. Análisis no relativista

6.1. Solución de la ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger para dos partículas localizadas en los puntos r_1 y r_2 con masas m_1 y m_2 respectivamente, sometidas a un potencial de interacción, puede simplificarse [8] al escribirse en términos de nuevas variables, el centro de masa y la distancia relativa entre las dos partículas $r = r_2 - r_1$. Con estas nuevas coordenadas y definiendo $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, se obtiene la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{1}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right) \Psi(\vec{x}, t), \quad (6.1)$$

siendo la ecuación de Schrödinger en una dimensión para una sola partícula con masa μ y coordenadas $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r = r_2 - r_1$ y

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Es una ecuación diferencial parcial de segundo orden en las coordenadas. La solución se puede obtener por separación de variables. Tomando

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})\eta(t), \quad (6.2)$$

reemplazando (6.2) en (6.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
i\psi(\vec{x})\frac{\partial}{\partial t}\eta(t) &= \left(-\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(\vec{x})\eta(t) \\
\stackrel{*(\eta\psi)^{-1}}{\Rightarrow} i\frac{1}{\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial t} &= \frac{1}{\psi(\vec{x})}\left(-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x})\right) \\
i\frac{1}{\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial t} = E, \frac{1}{\psi(\vec{x})}\left(-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x})\right) &= E \\
\eta(t) &= e^{-iEt} \\
-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x}) &= E\psi(\vec{x})
\end{aligned}$$

En donde E es la energía del sistema. Se obtiene la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y la solución para la dependencia temporal de $\Psi(\vec{x}, t)$. La solución general es

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}.$$

Para obtener la solución para la parte espacial, ya que el potencial solo depende de r , es más fácil trabajarlo en coordenadas esféricas. ∇^2 en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

por lo que la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas tiene la forma

$$-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) + V(r)\psi = E\psi \quad (6.3)$$

en donde se obvió la dependencia espacial de ψ . Otra vez, por separación de variables,

$$\psi(r, \theta, \phi) = Y(\theta, \phi)R(r) \quad (6.4)$$

reemplazando (6.4) en (6.3) y dividiendo dentro de $Y(\theta, \phi)R(r)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2 R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + V(r) = E \\
& \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + 2\mu r^2(E - V(r)) = -\frac{1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} \\
& \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + 2\mu r^2(E - V(r)) = l(l+1) \\
& \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = -l(l+1)\sin^2\theta Y
\end{aligned} \tag{6.5}$$

en donde, de nuevo, se obvió la dependencia espacial de R y Y . Con esto se obtiene las ecuaciones para la parte angular y la parte radial de la ecuación de Schrödinger. La constante $l(l+1)$ tiene esta forma pues así la ecuación para la parte angular se reducirá a una ecuación conocida.

Para la ecuación de la parte angular, de nuevo utilizando separación de variables,

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi), \tag{6.6}$$

insertando (6.6) en la ecuación de la parte angular y dividiendo dentro de $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -l(l+1)\sin^2\theta \\
& \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta\Theta = m^2\Theta \\
& \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2 \Rightarrow \Phi(\phi) = Ae^{im\phi}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

con lo que se obtuvo la ecuación para la dependencia de θ de la ecuación de Schrödinger y la solución para la dependencia de ϕ , con A una constante que se determina con la condición de normalización. La solución de ϕ tiene una restricción,

$$\Phi(\phi + n2\pi) = \Phi(\phi), n = 0, 1, 2, \dots$$

lo que devuelve la condición $m = \pm 1, \pm 2, \dots$.

La ecuación de θ tiene la forma de la ecuación asociada de Legendre, cuya única solución con significado físico son las funciones asociadas de Legendre [10]

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)} P_l(\cos\theta) \tag{6.8}$$

en donde $P_l(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre,

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

l es un entero positivo, cumpliendo la condición $|m| \leq l$, es decir, los posibles valores para m son $m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l$. La solución general para la parte angular es

$$Y(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} C_l^m P_l^m e^{im\phi}$$

La función $\psi(\vec{x})$ tiene que estar normalizada, es decir,

$$\begin{aligned} \int d^3x \psi(\vec{x})^* \psi(\vec{x}) &= 1 \\ \Rightarrow \int r^2 dr R(r)^* R(r) &= 1 \\ \Rightarrow \int \sin \theta d\theta d\phi Y(\theta, \phi)^* Y(\theta, \phi) &= 1, \end{aligned} \quad (6.9)$$

los términos $Y_l^m(\theta, \phi)$ normalizados se les llama *armónicos esféricos*

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (6.10)$$

en donde $\epsilon = (-1)^m$ para $m > 0$ y $\epsilon = 1$ para $m < 0$. Ver Anexo B para un análisis más detallado de las soluciones para la parte angular de la solución.

6.1.1. Parte radial de la ecuación de Schrödinger

La parte radial de la ecuación de Schrödinger obtenida en (6.5) es

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + 2\mu r^2 (E - V(r)) = l(l+1). \quad (6.11)$$

cuya solución dependerá de la forma de $V(r)$. Independientemente de la forma de este término, para calcular el factor del efecto Sommerfeld, se necesitará calcular el caso $V(r) = 0$, así que, tomando ese valor para el potencial, la parte radial de la ecuación es [10]

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - l(l+1))R = 0, \quad (6.12)$$

con $k = \sqrt{2\mu E}$. La solución a esta ecuación es

$$R(r) = Aj_l(kr) + Bn_l(kr)$$

en donde $j_l(kr)$ y $n_l(kr)$ son la función esférica de Bessel y la función esférica de Neumann de orden l respectivamente, cuyas expresiones son [3]

$$j_l(x) = 2^l x^l \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+l)!}{s! (2s+2l+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \quad (6.13)$$

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \frac{2^l \pi^{1/2}}{x^{l+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (s-l-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}, \quad (6.14)$$

pero $n_l(x)$ diverge cuando $x \rightarrow 0$, por lo que

$$R_l(r) = Aj_l(x).$$

Como se mostró en el capítulo anterior, en el límite no relativista, la interacción entre dos fermiones por medio de una partícula escalar es descrita por el potencial de Yukawa,

$$V(r) = \frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r}$$

en donde m_ϕ es la masa de la partícula escalar. Haciendo el cambio de variable, $u(r) = R(r)r$ se llega a la ecuación

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \mu \left(\frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r} \right) u = -k^2 u,$$

la cual se solucionará numéricamente. En el Anexo C se estudia las soluciones para el caso donde no hay potencial, en la siguiente sección, utilizando estas soluciones, se muestra que también son soluciones límite para la ecuación con el potencial de Yukawa cuando $rk \rightarrow 0$ lo cual llevará a la conclusión de que el término Y_0^0 de la solución angular es el que aporta más a la solución.

6.1.1.1. Parte radial de la ecuación de Schrödinger con $V(r) = \frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r}$

A este potencial se le llama potencial de Yukawa, la parte radial de la ecuación de Schrödinger con este potencial no tiene solución analítica [13], así que como se mencionó anteriormente, se solucionará numéricamente. Esta parte del trabajo se centra en estudiar el efecto Sommerfeld y para esto, encontrar el factor del

efecto Sommerfeld para la interacción entre dos partículas bajo la influencia de un potencial. Esto significa, determinar la probabilidad de que las dos partículas interactúen, lo cual se puede tomar como la probabilidad de que las dos partículas se encuentren en el mismo punto, el cual tomaré como el origen. Por esto, estoy interesado únicamente en la magnitud de la función de onda $\psi(r)$ con $r \rightarrow 0$, así que puedo centrarme en estudiar la solución para la ecuación de Schrödinger en esta región.

La ecuación tiene la forma

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + 2\mu r^2 (E - V(r)) R = l(l+1)R. \quad (6.15)$$

El procedimiento estándar para analizar esta ecuación es realizar la sustitución $u(r) = rR(r)$ con el motivo de simplificar la expresión, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \right) + 2\mu r^2 (E - V(r)) \frac{u}{r} &= l(l+1) \frac{u}{r} \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} - u \right) + 2\mu r^2 (E - V(r)) \frac{u}{r} &= l(l+1) \frac{u}{r} \\ \frac{du}{dr} + r \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{du}{dr} + 2\mu r^2 (E - V(r)) \frac{u}{r} &= l(l+1) \frac{u}{r} \\ \frac{d^2u}{dr^2} + 2\mu \left(E - \frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Cuando $r \rightarrow 0$, el término del potencial es despreciable y la única solución normalizable, por lo visto en 8, es $u \propto j_l(kr)$. Para velocidades pequeñas, es decir, $k \rightarrow 0$, entonces $j_l(kr) \propto (kr)^l$, en donde el término con mayor contribución estará dado por $l = 0$.

Ya que me interesa el punto $r \rightarrow 0$, utilizaré únicamente los términos con $l = 0$ y consecuentemente, por lo visto en 8, $m = 0$. Utilizando $l = 0$, la ecuación radial resultante es

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -2\mu \left(E - \frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r} \right) u. \quad (6.17)$$

Para resolver la ecuación de forma numérica necesitaré dos condiciones de frontera.

La primera condición de frontera, para $r = 0$ ejemplifica la utilidad de haber hecho el cambio de variable $u(r) = rR(r)$, pues al requerir que $R(r)$ sea finita en $r = 0$, automáticamente impone la condición de que $u(r) = 0$ en este punto.

La segunda condición de frontera se obtiene requiriendo que la función de onda de la partícula inicialmente sea esférica. Esta condición requiere un poco más de

trabajo, primero, la solución general para la función de onda $\psi(r, \theta, \phi)$ es

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) R_l(r).$$

Inicialmente, las partículas no están bajo el efecto de un potencial, por lo que la solución para la parte radial es $R_l(r) = j_l(kr)$ con $k = \sqrt{2\mu R}$. Por otro lado, dicho problema es el de la partícula libre, el cual, si se hubiera resuelto en coordenadas cartesianas, hubiera devuelto la solución $\psi \propto e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ con $\vec{p}^T = \mu(v_x, v_y, v_z)$. Si trabajo con una partícula que inicialmente se mueve en dirección z , entonces $\psi \propto e^{i|\vec{p}||\vec{r}|\cos\theta}$. La función de onda, inicialmente no depende del alguno ϕ por lo que solo el término a_{l0} es diferente de cero,

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l0} Y_l^0(\theta, \phi) j_l(r).$$

Notando que $Y_l^0(\theta, \phi) \propto P_l(\theta)$,

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\theta) j_l(r).$$

Para encontrar el valor de las constantes A_l se impone la condición de que $\psi \propto e^{i|\vec{p}||\vec{r}|\cos\theta}$. Para esto, se puede escribir a $j_l(x)$ en términos de $P_l(x)$, utilizando (8.17),

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{1}{2(l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \int_{-1}^1 dt e^{ixt} (1-t^2)^l \\ &= \frac{1}{2(l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^l (-1)^l \int_{-1}^1 dt e^{ixt} (t^2-1)^l \\ &= \frac{1}{2(l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^l (-1)^l \left[\frac{1}{2x} e^{ixt} (t^2-1)^l \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2x} 2^{2xt} \frac{d}{dt} (t^2-1)^l \right] \\ &= \frac{1}{2(l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^l (-1)^l \frac{(-1)}{2x} \int_{-1}^1 dt e^{2xt} \frac{d}{dt} (t^2-1)^l \\ &= \dots = \frac{1}{2(l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \frac{1}{(2x)^l} \int_{-1}^1 dt e^{2xt} \frac{d^l}{dt^l} (t^2-1)^l \\ &\stackrel{(8.3)}{=} \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^1 dt e^{ixt} P_l(t). \end{aligned}$$

con dicha expresión, ya estamos listos para determinar el valor de la constante A_l .

Utilizando la relación $E = (1/2\mu)|\vec{p}|^2$ y utilizando $r = |\vec{r}|$, se tiene que

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) j_l(kr) = e^{ikr \cos \theta} \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta') e^{ikr \cos \theta'} P_l(\cos \theta') &= e^{ikr \cos \theta}\end{aligned}\tag{6.18}$$

por otro lado, si se quiere escribir a $e^{ikr \cos \theta}$ en términos de polinomios de Legendre utilizando su propiedad de completitud,

$$\begin{aligned}e^{ikr \cos \theta} &= \sum_{v=0}^{\infty} b_v P_v(\cos \theta) \\ &\stackrel{(8.11)}{=} \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\cos \theta) \frac{2v+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta') e^{ikr \cos \theta'} P_v(\cos \theta').\end{aligned}\tag{6.19}$$

Comparando (6.18) y (6.19) se obtiene que

$$A_l = (2l+1)(i)^l,$$

obteniendo finalmente que la función de onda de las partículas mucho antes de interaccionar, es decir, en el límite cuando $r \rightarrow \infty$ es igual a

$$\psi_{\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) j_l(kr).\tag{6.20}$$

Esta expresión me proporciona de la segunda condición de frontera de tal forma que $R \rightarrow j_l$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Como el infinito es un valor el cual experimentalmente es imposible obtener, se utilizará la condición de frontera $R \rightarrow j_l(kr_{\infty})$ cuando $r \rightarrow r_{\infty}$, r_{∞} un valor muy grande. Que tan grande tiene que ser r_{∞} dependerá de los valores utilizados en la función, pero lo que se busca es que $V(r) \rightarrow 0$ en este límite.

6.2. Resultados no relativistas

6.2.1. Solución numérica de la ecuación radial

Se resolvió la ecuación (6.17) sujeta a las condiciones de frontera $u(0) = 0$ y $u(r_{\infty}) = r j_0(kr_{\infty}) = \sin(kr_{\infty})/k$ [10]. Sabiendo que, una partícula de materia oscura

se puede esperar que interaccione de forma débil, se utilizó $m_\phi = 90\text{Gev}$. Para una constante de interacción $\lambda = \pm 1/30$, se tiene que $V(1) \sim \pm 3 \times 10^{-41}$, por lo que se utilizó $r_\infty = 1$ para la mayoría de los resultados.

El método utilizado para resolver la ecuación es el de diferencias finitas [6]. Teniendo una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x) = f(x, y, dy/dx),$$

sujeta a las condiciones de frontera $y = \alpha$ cuando $x = a$ y $y = \beta$ para $x = b$. El método consiste en dividir el intervalo que se va a integrar en $N + 1$ intervalos, con $h = (b - a)/(N + 1)$, $x_i = a + ih$, la ecuación diferencial se aproxima a

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = p(x_i)\frac{dy}{dx}(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i), \quad (6.21)$$

se expande a y en series de Taylor centradas en x_i evaluadas en x_{i+1} y x_{i-1}

$$y(x_{i\pm 1}) = y(x_i) \pm h\frac{dy}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \pm \frac{h^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4}(\epsilon^\pm),$$

con ϵ^\pm algún valor en el intervalo $[x_i, x_{i\pm 1}]$. Sumando

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) + \frac{h^4}{24}\left(\frac{d^4y}{dx^4}(\epsilon^+) + \frac{d^4y}{dx^4}(\epsilon^-)\right),$$

despejando para d^2y/dx^2 ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - E(h^2)$$

en donde $E(h^2)$ es el error. De forma similar, se obtiene

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - E(h^2).$$

Sustituyendo en (6.21),

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - E(h^2).$$

Omitiendo el término de error, sustituyendo los términos $p(r) = 0$, $q(r) = -2\mu(E - \lambda/r)e^{-m_\phi r}$, $r(r) = 0$, $a = 0$, $b = r_\infty$, $\alpha = 0$, $\beta = rj_0(kr_\infty)$ y reordenando términos

se obtiene el sistema de ecuaciones que se resolvió

$$-u(r_{i-1}) + (2 + h^2q(r_i))u(r_i) - u(r_{i+1}) = 0.$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Este sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$Au = b$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2q(r_1) & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^2q(r_2) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^2q(r_3) & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + h^2q(r_{N-1}) & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + h^2q_N \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u(r_1) \\ u(r_2) \\ u(r_3) \\ \dots \\ u(r_{N-2}) \\ u(r_{N-1}) \\ u(r_N) \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} u(r_0) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ u(r_{N+1}) \end{bmatrix}$$

Es un sistema con N ecuaciones y N incógnitas. Tiene solución única si el determinante de la matriz A es diferente de cero. Utilizando $q(r_i) = q_i$,

$$\det(A) = |f_N| = [2 + h^2q_1]|f_{N-1}| - (-1)(-1)|f_{N-2}|.$$

Conociendo a $|f_1| = [2 + h^2q_N] = 2 + E(h^2)$ con $E(h^2)$ un error en el cálculo, del orden de h^2 o mayor, $|f_2| = [2 + h^2q_{N-1}][2 + h^2q_N] - 1 = 3 + E(h^2)$, se encuentra $|f_3| = [2 + h^2q_{N-2}](3 + E(h^2)) - (2 + E(h^2)) = 4 + E(h^2)$, $|f_4| = 5 + E(h^2)$, $|f_5| = 6 + E(h^2)$ y así, por inducción, suponiendo que $|f_i| = i + 1 + E(h^2)$, entonces

$$\begin{aligned} |f_{i+1}| &= [2 + h^2q_{N-i+1}]|f_i| - |f_{i-1}| = (2)(i + 1) - (i) + E(h^2) = (i + 1) + 1 + E(h^2) \\ \Rightarrow |f_N| &= N + 1 + E(h^2). \end{aligned}$$

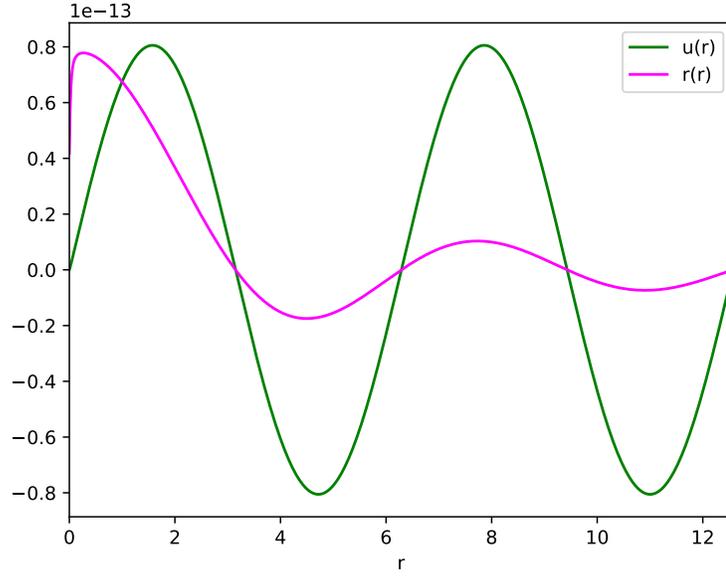


Figura 6.1. En verde la solución a la ecuación (6.17) utilizando $\mu = 1000\text{Gev}$, $v = 0.001$, $\lambda = -1/30$ y $m_\phi = 90\text{Gev}$, con el método de diferencias finitas. $R(r) = u(r)/r$ en morado.

Suponiendo que $E(h^2)$ es pequeño, es decir $h^2 q_i \ll 1$, entonces la determinante siempre será mayor a cero y el sistema de ecuaciones tendrá solución única.

En la figura 6.1 se observa la forma de las soluciones, $u(r)$ es una función periódica que se desvanece en el origen y tiende a $rj_0(kr)$ en infinito.

6.2.2. Factor del efecto Sommerfeld

Para calcular el factor del efecto Sommerfeld, se tiene que calcular la norma al cuadrado de la función de onda con y sin el potencial.

$$|\psi_{V=0}(0)|^2 \stackrel{ec.(6.20), l=0}{=} \lim_{r \rightarrow 0} |P_0(\cos \theta) j_0(kr)| = \lim_{r \rightarrow 0} |j_0(kr)|^2 = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\sin kr}{kr} \right|^2 = 1$$

$$|\psi(0)|^2 = \lim_{r \rightarrow 0} |P_0(\cos \theta) R_0(kr)| = R_0(0)^2$$

y por (3.3),

$$S = \frac{|\psi(0)|^2}{|\psi_{V=0}(0)|^2} = R_0(0)^2.$$

Como $R(r) = u(r)/r$, entonces utilizando l'Hopital,

$$R(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{du}{dr}(r),$$

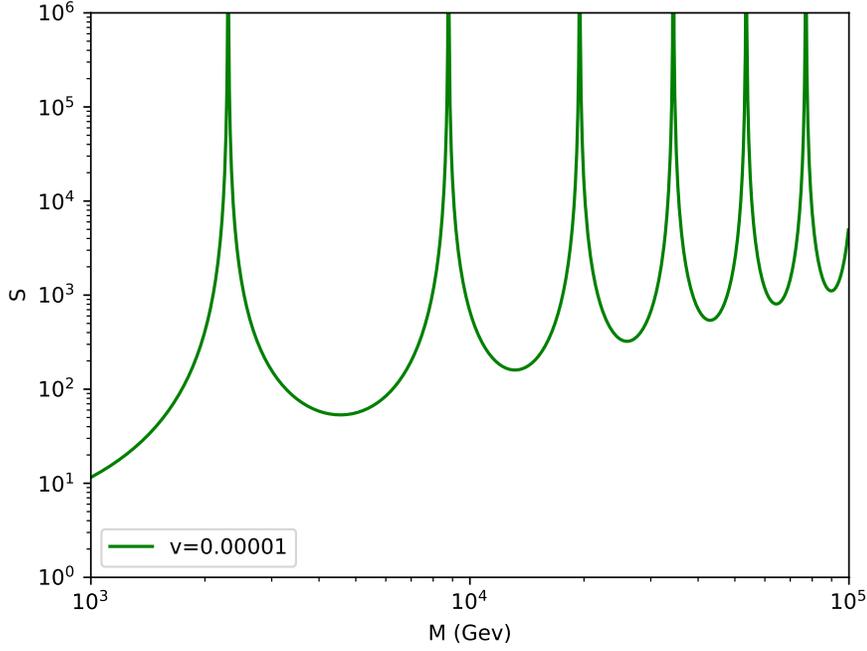


Figura 6.2. Factor del efecto Sommerfeld como función de la masa reducida $M = \mu$ de la partícula de materia oscura, utilizando $m_\phi = 90\text{Gev}$, $\lambda = 1/30$ y $r_\infty = 1$.

este valor se aproximó como

$$R(r_0) = \frac{u(r_1) - u(r_0)}{r_1 - r_0}$$

La figura 6.2 muestra el resultado final de la evaluación para diferentes valores de masa. Se observa que hay valores específicos para la masa en donde existe una especie de resonancia. Para intentar explicar esto, en la tabla 6.1 se muestra que la relación entre las masas en donde hay resonancia μ_i siguen una relación $1 : 4 : 9 : \dots : i^2$.

Se puede obtener una explicación a este comportamiento aprovechando el hecho de que, de la solución a la ecuación (6.16), solo se está utilizando una región cercana a cero, por lo que se puede utilizar $m_\phi r \ll 1$. Expandiendo la expresión del potencial,

Tabla 6.1. Relación entre los diferentes valores de masa en donde hay resonancias y el primer valor según evaluación numérica.

n^2	μ_n/μ_1
1	1
4	3.809
9	8.466
16	14.944
25	23.284
36	33.432

utilizando $x = rm_\phi$ y $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} e^{-m_\phi r} &\approx \frac{\lambda}{r} (1 - m_\phi r) \\ \stackrel{(6.16)}{\Rightarrow} \frac{d^2 u}{dr^2} &= -2\mu E u + 2\mu \frac{\lambda}{r} (1 - m_\phi r) u + \frac{l(l+1)}{r^2} u \\ \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{\mu|\lambda|}{m_\phi x} u - \frac{l(l+1)}{x^2} u &= \left(2 \frac{\mu|\lambda|}{m_\phi} - \frac{k^2}{m_\phi^2} \right) u. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Si $2\mu|\lambda|/m_\phi > k^2/m_\phi^2$ o de forma equivalente $m_\phi \lambda > (1/2)\mu v^2$, entonces la ecuación tiene la misma forma que la ecuación del átomo de Hidrogeno. Haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{2\mu|\lambda|}{m_\phi} - \frac{k^2}{m_\phi^2} \right)^{1/2} x \\ \rho_0 &= \frac{2\mu|\lambda|}{m_\phi} \left(\frac{2\mu|\lambda|}{m_\phi} - \frac{k^2}{m_\phi^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

la ecuación resultante es

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u.$$

Resolviendo de forma análoga al átomo de Hidrogeno [10] [20], se llega a

$$\begin{aligned} 2n &= \rho_0 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{2\lambda m_\phi n^2}{\lambda^2 + v^2 n^2} \stackrel{v \rightarrow 0}{\approx} \frac{2m_\phi n^2}{\lambda} \end{aligned}$$

Concluyendo que para esta región, se forman estados ligados para valores discretos

de μ , con una relación $1 : 4 : 9 : \dots : i^2$, para cuyos valores se espera obtener resonancias en el factor del efecto Sommerfeld [12].

Para $m_\phi\lambda < (1/2)\mu v^2$ las partículas ya no forman estados ligados y esta estructura de resonancias se pierde [12]. La ecuación (6.22) con $m_\phi\lambda \ll (1/2)\mu v^2$ es igual al caso de tener un potencial de Coulomb, el cual se puede resolver de forma analítica. Citando el resultado [13],

$$S \propto \frac{1}{v}, v \rightarrow 0$$

$$S \rightarrow 1, v \rightarrow \infty.$$

Resumiendo, para velocidades grandes, $S \rightarrow 1$, a lo largo que la velocidad disminuye y se acerca a cero, $S \propto 1/v$, y para velocidades aún menores, en la región $m_\phi\lambda \gg (1/2)\mu v^2$, S presenta una estructura de resonancia para valores discretos de μ .

7. Conclusiones

- Utilizando teoría cuántica de campos se estudió un término de interacción de la aniquilación entre dos fermiones de materia oscura a partículas del modelo estándar. El término que se analizó fue uno en donde las partículas iniciales eran los dos fermiones de materia oscura y la partícula final era una partícula escalar ϕ .

Analizando la dependencia de la velocidad inicial de las partículas sobre los primeros términos de la amplitud, se encontró que los términos de orden dos crecen para velocidades pequeñas, imposibilitando el utilizar solo algunos términos en la expansión perturbativa, haciendo necesario analizar el fenómeno de otra forma.

- Sabiendo que la dependencia de la velocidad sobre el factor del efecto Sommerfeld es relevante únicamente para velocidades pequeñas, se puede analizar utilizando mecánica cuántica no relativista. En este límite la evolución de la función de onda del sistema está descrito por la ecuación de Schrödinger de dos partículas interactuando por un potencial de Yukawa.
- El factor del efecto Sommerfeld encontrado, utilizando mecánica cuántica no relativista, de la interacción entre dos partículas con un potencial de Yukawa es

$$S = R(0)^2$$

en donde R es solución a la parte radial de la ecuación de Schrödinger. En el límite para velocidades pequeñas se puede utilizar

$$S = R_0(0)^2$$

en donde R_0 es solución a la parte radial de la ecuación de Schrödinger con l , el número cuántico asociado a el momento angular, igual a cero.

- La solución para la parte radial de la ecuación de Schrödinger se encontró

numéricamente utilizando el método de diferencias finitas. Se encontró que hay valores específicos para la masa de las partículas de materia oscura en donde existe una especie de resonancia y el factor del efecto Sommerfeld se ve incrementado. Estos valores siguen una relación $\mu_n = \mu_1 n^2$. Estas resonancias se explican pues para velocidades pequeñas, en regiones cercanas al origen, el sistema se comporta como si fuera un sistema ligado, en analogía al átomo de Hidrogeno, en donde los valores de las energías están discretizados. Para velocidades más grandes, el sistema deja de comportarse como un sistema ligado y la estructura de resonancia se pierde. Para velocidades grandes $S \rightarrow 1$, mostrando de nuevo que se pierde la dependencia de la velocidad sobre el factor del efecto Sommerfeld.

8. Anexos

Anexo A

En la sección 5.1.2 se encontró a la amplitud $\bar{\mathcal{A}}_{(2)}^2(e_1, g_1, e_2, g_2)$. A continuación escribo los valores explícitos de las constantes dependientes de $x = x_1, x_2, x_3, y_1 = z, y_2 = z_2, y_3 = z_3, v$ y M .

$$e_1 = 1.0M^2v^4 + 8.0M^2v^2$$

$$\begin{aligned} g_1 = & v^8 (-0.25M^4x_2^2 - 0.5M^4x_2z_2 - 0.25M^4z_2^2 + 0.25M^4) + \\ & v^6 (-2.0M^4x_2^2 - 8.0M^4x_2z_2 + 6.0M^4x_2 - 2.0M^4z_2^2 - 6.0M^4z_2 + 8.0M^4) + \\ & v^4 (-1.0M^4x_2^2 - 34.0M^4x_2z_2 + 32.0M^4x_2 - 1.0M^4z_2^2 - 32.0M^4z_2 + 34.0M^4) + \\ & v^2 (-8.0M^4x_2^2 - 16M^4x_2z_2 + 16M^4x_2 - 8.0M^4z_2^2 - 16M^4z_2 + 32.0M^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 = & v^8 (-0.25M^4x^2 - 0.5M^4xz - 0.25M^4z^2 + 0.25M^4) + \\ & v^6 (-2.0M^4x^2 - 8.0M^4xz + 6.0M^4x - 2.0M^4z^2 - 6.0M^4z + 8.0M^4) + \\ & v^4 (-1.0M^4x^2 - 34.0M^4xz + 32.0M^4x - 1.0M^4z^2 - 32.0M^4z + 33.0M^4 + 1.0M^3m) + \\ & v^2 (-8.0M^4x^2 - 16M^4xz + 24M^4x - 8.0M^4z^2 - 24M^4z + 32.0M^4 - 8M^3mx + 8M^3mz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 = & v^{12}(0.0625M^6x^2x_2^2 + 0.125M^6x^2x_2z_2 + 0.0625M^6x^2z_2^2 - 0.0625M^6x^2 + 0.125M^6xx_2^2z + \\
& 0.25M^6xx_2zz_2 + 0.125M^6xzz_2^2 - 0.125M^6xz + 0.0625M^6x_2^2z^2 - 0.0625M^6x_2^2 + \\
& 0.125M^6x_2z^2z_2 - 0.125M^6x_2z_2 + 0.0625M^6z^2z_2^2 - 0.0625M^6z^2 - 0.0625M^6z_2^2 + 0.0625M^6) + \\
& v^{10}(0.5M^6x^2x_2^2 + 2.0M^6x^2x_2z_2 - 1.5M^6x^2x_2 + 0.5M^6x^2z_2^2 + 1.5M^6x^2z_2 - 2.0M^6x^2 + \\
& 2.0M^6xx_2^2z - 1.5M^6xx_2^2 + 6.0M^6xx_2zz_2 - 3.0M^6xx_2z - 3.0M^6xx_2z_2 + 1.0M^6xx_2 + \\
& 2.0M^6xzz_2^2 + 3.0M^6xzz_2 - 5.0M^6xz - 1.5M^6xz_2^2 - 1.0M^6xz_2 + 2.5M^6x + 0.5M^6x_2^2z^2 + \\
& 1.5M^6x_2^2z - 2.0M^6x_2^2 + 2.0M^6x_2z^2z_2 - 1.5M^6x_2z^2 + 3.0M^6x_2zz_2 - 1.0M^6x_2z - \\
& 5.0M^6x_2z_2 + 2.5M^6x_2 + 0.5M^6z^2z_2^2 + 1.5M^6z^2z_2 - 2.0M^6z^2 + 1.5M^6zz_2^2 + 1.0M^6zz_2 - \\
& 2.5M^6z - 2.0M^6z_2^2 - 2.5M^6z_2 + 4.5M^6) + v^8(0.5M^6x^2x_2^2 + 9.0M^6x^2x_2z_2 - 8.0M^6x^2x_2 + \\
& 0.5M^6x^2z_2^2 + 8.0M^6x^2z_2 - 8.75M^6x^2 + 9.0M^6xx_2^2z - 8.0M^6xx_2^2 + 50.0M^6xx_2zz_2 - \\
& 40.0M^6xx_2z - 40.0M^6xx_2z_2 + 32.0M^6xx_2 + 9.0M^6xzz_2^2 + 40.0M^6xzz_2 - 49.5M^6xz - \\
& 8.0M^6xz_2^2 - 32.0M^6xz_2 + 40.5M^6x + 0.5M^6x_2^2z^2 + 8.0M^6x_2^2z - 8.5M^6x_2^2 + 9.0M^6x_2z^2z_2 - \\
& 8.0M^6x_2z^2 + 40.0M^6x_2zz_2 - 32.0M^6x_2z - 49.0M^6x_2z_2 + 40.0M^6x_2 + 0.5M^6z^2z_2^2 + \\
& 8.0M^6z^2z_2 - 8.75M^6z^2 + 8.0M^6zz_2^2 + 32.0M^6zz_2 - 39.5M^6z - 8.5M^6z_2^2 - 40.0M^6z_2 + 49.25M^6 - \\
& 0.5M^5mx - 0.25M^5mx_2^2 - 0.5M^5mx_2z_2 - 0.5M^5mz - 0.25M^5mz_2^2 + 0.75M^5m) + v^6(4.0M^6x^2x_2^2 + \\
& 12.0M^6x^2x_2z_2 - 10.0M^6x^2x_2 + 4.0M^6x^2z_2^2 + 10.0M^6x^2z_2 - 16.0M^6x^2 + 12.0M^6xx_2^2z - \\
& 12.0M^6xx_2^2 + 160.0M^6xx_2zz_2 - 1.0M^6xx_2z - 152.0M^6xx_2z_2 + 144.0M^6xx_2 + 12.0M^6xzz_2^2 + \\
& 148.0M^6xzz_2 - 168.0M^6xz - 12.0M^6xz_2^2 - 144.0M^6xz_2 + 164.0M^6x + 4.0M^6x_2^2z^2 + 12.0M^6x_2^2z - \\
& 16.0M^6x_2^2 + 12.0M^6x_2z^2z_2 - 10.0M^6x_2z^2 + 152.0M^6x_2zz_2 - 144.0M^6x_2z - 164.0M^6x_2z_2 + \\
& 154.0M^6x_2 + 4.0M^6z^2z_2^2 + 10.0M^6z^2z_2 - 16.0M^6z^2 + 12.0M^6zz_2^2 + 144.0M^6zz_2 - 160.0M^6z - \\
& 16.0M^6z_2^2 - 154.0M^6z_2 + 180.0M^6 + 2.0M^5mxx_2^2 + 4.0M^5mxx_2z_2 - 4.0M^5mxx_2 + 2.0M^5mxz_2^2 + \\
& 4.0M^5mxz_2 - 8.0M^5mx - 2.0M^5mx_2^2z - 4.0M^5mx_2z_2 + 4.0M^5mx_2z - 4.0M^5mx_2z_2 + \\
& 2.0M^5mx_2 - 2.0M^5mzz_2^2 - 4.0M^5mzz_2 + 4.0M^5mz - 2.0M^5mz_2 + 4.0M^5m) + v^4(1.0M^6x^2x_2^2 + \\
& 34.0M^6x^2x_2z_2 - 32.0M^6x^2x_2 + 1.0M^6x^2z_2^2 + 32.0M^6x^2z_2 - 34.0M^6x^2 + 34.0M^6xx_2^2z - \\
& 32.0M^6xx_2^2 + 132.0M^6xx_2zz_2 - 128.0M^6xx_2z - 160.0M^6xx_2z_2 + 160.0M^6xx_2 + 34.0M^6xzz_2^2 + \\
& 128.0M^6xzz_2 - 196.0M^6xz - 32.0M^6xz_2^2 - 160.0M^6xz_2 + 226.0M^6x + 1.0M^6x_2^2z^2 + 32.0M^6x_2^2z - \\
& 33.0M^6x_2^2 + 34.0M^6x_2z^2z_2 - 32.0M^6x_2z^2 + 160.0M^6x_2zz_2 - 160.0M^6x_2z - 194.0M^6x_2z_2 + \\
& 192.0M^6x_2 + 1.0M^6z^2z_2^2 + 32.0M^6z^2z_2 - 34.0M^6z^2 + 32.0M^6zz_2^2 + 160.0M^6zz_2 - 222.0M^6z - \\
& 33.0M^6z_2^2 - 192.0M^6z_2 + 260.0M^6 + 32.0M^5mxx_2z_2 - 32.0M^5mxx_2 + 32.0M^5mxz_2 - 34.0M^5mx - \\
& 1.0M^5mx_2^2 - 32.0M^5mx_2z_2 + 32.0M^5mx_2z - 2.0M^5mx_2z_2 - 32.0M^5mz_2 + 30.0M^5mz -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1.0M^5mz_2^2 + 4.0M^5m) + v^2(8M^6x^2x_2^2 + 16.0M^6x^2x_2z_2 - 16M^6x^2x_2 + 8M^6x^2z_2^2 + \\
& 16M^6x^2z_2 - 32.0M^6x^2 + 16.0M^6xx_2^2z - 24M^6xx_2^2 + 32.0M^6xx_2zz_2 - 32M^6xx_2z - \\
& 48M^6xx_2z_2 + 48M^6xx_2 + 16.0M^6xzz_2^2 + 32M^6xzz_2 - 64.0M^6xz - 24M^6xz_2^2 - 48M^6xz_2 + \\
& 96.0M^6x + 8M^6x_2^2z^2 + 24M^6x_2^2z - 32.0M^6x_2^2 + 16.0M^6x_2z^2z_2 - 16M^6x_2z^2 + \\
& 48M^6x_2zz_2 - 48M^6x_2z - 64.0M^6x_2z_2 + 64M^6x_2 + 8M^6z^2z_2^2 + 16M^6z^2z_2 - 32.0M^6z^2 + \\
& 24M^6zz_2^2 + 48M^6zz_2 - 96.0M^6z - 32.0M^6z_2^2 - 64M^6z_2 + 128.0M^6 + 8M^5mxx_2^2 + \\
& 16M^5mxx_2z_2 - 16M^5mxx_2 + 8M^5mxx_2^2 + 16M^5mxx_2z - 32.0M^5mx - 8M^5mx_2^2z - \\
& 16M^5mx_2zz_2 + 16M^5mx_2z - 8M^5mzz_2^2 - 16M^5mzz_2 + 32M^5mz)
\end{aligned}$$

Anexo B

Parte angular de la solución de Schrödinger

En la sección 6.1 se habló de la solución para la ecuación de Schrödinger, entre lo que se mencionó la solución para la parte angular de la solución. En esta sección empezaré desarrollando la demostración de que $P_l^m(\cos \theta)$ es la solución de la ecuación asociada de Legendre y terminaré mostrando que $Y_l^m(\theta, \phi)$ es la solución normalizada de la parte angular de la ecuación de Schrödinger. En el proceso escribiré propiedades importantes de los polinomios de Legendre, las funciones asociadas de Legendre y los armónicos esféricos.

Polinomios de Legendre

La función generadora de los polinomios de Legendre es [3]

$$g_L(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (8.1)$$

en donde t y x no representan ninguna cantidad física en concreto, son variables de las que dependen la función g_L . Esta relación da una forma de calcular explícitamente a $P_n(x)$, escribiendo la expansión en series de Taylor y utilizando el teorema del

binomio,

$$\begin{aligned}
(1 + (-2xt + t^2))^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n(1 + (-2xt + t^2))^{-1/2}}{d(-2xt + t^2)^n} \Big|_{(-2xt+t^2)=0} (-2xt + t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{-1}{2} - (n-1)\right) (1 + (-2xt + t^2))^{-1/2} \Big|_{(-2xt+t^2)=0} (-2xt + t^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (-2xt + t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (2x - t)^n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (2x)^{n-k} (-t)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n-k)!k!} (2x)^{n-k} t^{k+n}.
\end{aligned}$$

Utilizando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_{m,k} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p/2} C_{p-q,q}$$

que significa un cambio de orden para contar, y renombrando índices,

$$\begin{aligned}
(1 + (-2xt + t^2))^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k} (n-k)! (n-2k)!k!} (2x)^{n-2k} t^n \\
\Rightarrow P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n (n-k)! (n-2k)!k!} x^{n-2k},
\end{aligned} \tag{8.2}$$

encontrando una expresión para $P_n(x)$. Otra forma de escribirlo se puede obtener utilizando el teorema del binomio en la expresión $(x^2 - 1)^n$,

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{2(k-n)} (-1)^k$$

y notando que la n -ésima derivada de un polinomio de grado $m < n$ es igual a cero, entonces,

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!(n-2k)!k!} x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{1}{2^n(n-k)!k!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{2n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

La ecuación a la que se llegó es la fórmula de Rodríguez para los polinomios de Legendre [3]. Otra forma de obtener los polinomios es a través de las relaciones de recurrencia.

Derivando respecto de t ambos lados de la ecuación (8.1),

$$\begin{aligned}
\frac{dg_L(t, x)}{dt} &= \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} \\
\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} \\
(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n - (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} &= 0 \\
-(1+n) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} &= 0 \\
-\sum_{m=1}^{\infty} m P_{m-1}(x) t^m + x \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) P_n(x) t^n - \sum_{q=-1}^{\infty} P_{q+1}(x) (q+1) t^q &= 0,
\end{aligned}$$

sabiendo que $P_s(x) = 0$ para $s < 0$ y renombrando índices,

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=0}^{\infty} n P_{n-1}(x) t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) (n+1) t^n &= 0 \\
(1+2n)x P_n(x) &= n P_{n-1}(x) + (n+1) P_{n+1}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

La ecuación (8.4) es una relación de recurrencia y es una forma de obtener todos los valores de $P_n(x)$ si se conocen los primeros dos términos, utilizando (8.2), $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.

Ahora derivando respecto de x ambos lados de la ecuación 8.1,

$$\begin{aligned}
\frac{dg_L(x, t)}{x} &= \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(x)}{dx} t^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{t+1} - (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(x)}{dx} t^n &= 0 \\
-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(x)}{dx} t^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(x) + 2x \frac{dP_n(x)}{dx}) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(x)}{dx} t^n &= 0 \quad (8.5) \\
-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_{n-2}(x)}{dx} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n-1}(x) + 2x \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n(x)}{dx} t^n &= 0 \\
-\frac{dP_{n-2}(x)}{dx} + (P_{n-1}(x) + 2x \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}) - \frac{dP_n(x)}{dx} &= 0 \\
\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} = P_n(x) + 2x \frac{dP_n(x)}{dx} &
\end{aligned}$$

diferenciando (8.4) respecto de x , multiplicando por 2 y utilizando dicho resultado para eliminar un término de (8.5),

$$\begin{aligned}
2(1 + 2n)(P_n(x) + x \frac{dP_n(x)}{dx}) &= 2n \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} + 2(n + 1) \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} \\
\stackrel{-(1+2n)(8.5)}{\Rightarrow} (1 + 2n)P_n(x) &= -\frac{dP_{n-1}(x)}{dx} + \frac{dP_{n+1}(x)}{dx}. \quad (8.6)
\end{aligned}$$

Restando (8.5) y (8.6),

$$x \frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} + nP_n(x). \quad (8.7)$$

Sumando (8.5) y (8.6),

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} = (n + 1)P_n(x) + x \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (8.8)$$

Cambiando de índices y restando (8.8) - $x(8.7)$,

$$(1 - x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) \quad (8.9)$$

diferenciando (8.9),

$$\begin{aligned}
& -2x \frac{dP_n(x)}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2P_n(x)}{dx^2} = -nP_n(x) - nx \frac{dP_n(x)}{dx} + n \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} \\
& \stackrel{(8.7)}{\Rightarrow} -2x \frac{dP_n(x)}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2P_n(x)}{dx^2} = -nP_n(x) - nx \frac{dP_n(x)}{dx} + nx \frac{dP_n(x)}{dx} - n^2P_n(x) \\
& (1-x^2) \frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0
\end{aligned} \tag{8.10}$$

La ecuación (8.10) es la ecuación de Legendre. Al haberse obtenido a partir de las relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre, estos son soluciones de la ecuación. Esto termina la prueba de que los polinomios de Legendre son soluciones de la ecuación de Legendre, en el proceso se obtuvieron dos expresiones para los polinomios y una forma de obtener todos los términos a partir de las relaciones de recurrencia. Falta mencionar ciertos aspectos de importancia sobre los polinomios, primero, son ortogonales ante el producto interno definido como [3],

$$\langle P_n(x) | P_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}.$$

de echo, la ecuación (8.10) se puede escribir en su forma autoadjunta

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] = -n(n+1)P_n(x) \\
& L(P_n(x)) = -n(n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

en donde los $P_n(x)$ son autofunciones del operador $L()$ con autovalores $n(n+1)$. Además de ser ortogonales, los polinomios de Legendre forman un set completo en el intervalo $[-1, 1]$ [3]. Esto significa que cualquier función $f(x)$ continua y con primera derivada continua en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser aproximada como una suma de polinomios de Legendre,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

en donde los términos a_n se calculan usando

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \tag{8.11}$$

Funciones asociadas de Legendre

Anteriormente se llegó a la ecuación de Legendre y se mostró que los polinomios de Legendre son soluciones de la ecuación. A partir de esta ecuación, se puede derivar la ecuación asociada de Legendre y en el proceso, mostrar que las funciones asociadas de Legendre son soluciones.

La formula de Leibniz para la n -ésima derivada de una multiplicación dice que [3]

$$\frac{d^n x}{dx^n} (A(x)B(x)) = \sum_{s=0}^n \frac{n!}{(n-s)!s!} \frac{d^{n-s} x}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s x}{dx^s}.$$

Utilizando este resultado, derivando m veces a la ecuación de Legendre se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d^m x}{dx^m} \left(\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1)P_n(x) \right) = 0 \\ & \sum_{s=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{(m-s+1)!s!} \frac{d^{m-s+2}}{dx^{m-s+2}} P_n(x) \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} (1-x^2) + n(n+1) \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = 0 \\ & \frac{(m+1)!}{(m+1)!0!} \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_n(x) (1-x^2) - 2x \frac{(m+1)!}{m!1!} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_n(x) \\ & - \frac{(m+1)!}{(m-1)!} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} + n(n+1) \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = 0 \\ & (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) - 2x(m+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) + (n(n+1) - m(m+1)) \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = 0 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Haciendo un cambio de variables,

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} &= (1-x^2)^{-m/2} v(x) \\
\frac{d}{dx} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) &= \frac{2xm}{2} (1-x^2)^{(-m-2)/2} v(x) + (1-x^2)^{-m/2} \frac{dv(x)}{dx} \\
&= \left(\frac{xmv(x)}{(1-x^2)} + \frac{dv(x)}{dx} \right) (1-x^2)^{-m/2} \\
\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) &= \\
\frac{xm}{1-x^2} (1-x^2)^{-m/2} \left(\frac{xmv(x)}{(1-x^2)} + \frac{dv(x)}{dx} \right) &+ (1-x^2)^{-m/2} \left(\frac{mv(x) + mxv'(x)}{1-x^2} + \frac{2x^2mv(x)}{(1-x^2)^2} + \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) \\
&= (1-x^2)^{-m/2} \left(\frac{mx^2v(x)(2+m)}{(1-x^2)^2} + \frac{mv(x)}{1-x^2} + \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{dv(x)}{dx} \frac{2xm}{1-x^2} \right)
\end{aligned}$$

sustituyendo en (8.12),

$$\begin{aligned}
(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) - 2x(m+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) + (n(n+1) - m(m+1)) \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} &= 0 \\
(1-x^2) \left((1-x^2)^{-m/2} \left(\frac{mx^2v(x)(2+m)}{(1-x^2)^2} + \frac{mv(x)}{1-x^2} + \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{dv(x)}{dx} \frac{2xm}{1-x^2} \right) \right) & \\
- 2x(m+1) \left(\left(\frac{xmv(x)}{(1-x^2)} + \frac{dv(x)}{dx} \right) (1-x^2)^{-m/2} \right) + (n(n+1) - m(m+1)) (1-x^2)^{-m/2} v(x) &= 0 \\
(1-x^2) \frac{d^2v}{dx^2} - 2x \frac{dv(x)}{dx} - \frac{x^2v(x)m^2}{1-x^2} + mv(x) + (n(n+1) - m(m+1))v(x) &= 0 \\
(1-x^2) \frac{d^2v}{dx^2} - 2x \frac{dv(x)}{dx} + \frac{-x^2vm^2 + m^2x^2v - m^2v}{1-x^2} + n(n+1)v(x) &= 0 \\
(1-x^2) \frac{d^2v}{dx^2} - 2x \frac{dv(x)}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) v(x) &= 0
\end{aligned} \tag{8.13}$$

obteniendo la ecuación asociada de Legendre, donde $v(x) = P_n^m(x)$ son las funciones asociadas de Legendre, soluciones de la ecuación.

Utilizando $x = \cos \theta$ se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{dv(x)}{dx} &= \frac{dv}{d\theta} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-1} = \frac{-1}{\sin \theta} \frac{dv}{d\theta} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d^2v}{d\theta^2} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-2} + \frac{dv}{dx} \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\theta^2} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-2} + \frac{dv}{dx} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-1} \\ &= \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{dv \tan \theta}{dx \sin^2 \theta},\end{aligned}$$

sustituyendo en (8.13),

$$\begin{aligned}(1-x^2) \frac{d^2v}{dx^2} - 2x \frac{dv(x)}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) v(x) &= 0 \\ (1-\cos^2 \theta) \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{dv \tan \theta}{dx \sin^2 \theta} \right) \\ - 2 \cos \theta \frac{-1}{\sin \theta} \frac{dv}{d\theta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\cos^2 \theta} \right) v &= 0 \\ \frac{d^2v}{d\theta^2} + \tan \theta \frac{dv}{d\theta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) v &= 0 \\ \stackrel{* \sin^2 \theta}{\Rightarrow} \sin^2 \theta \frac{d^2v}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{dv}{d\theta} + (n(n+1) - m^2) v &= 0 \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + (n(n+1) - m^2) v &= 0\end{aligned}$$

llegando a la misma expresión que se tenía en (6.7). Esta es la ecuación asociada de Legendre, cuyas soluciones son las funciones asociadas de Legendre $v(\cos \theta) = P_n^m(\cos \theta)$.

Se puede demostrar [3] que las funciones asociadas de Legendre también son un conjunto completo y ortogonal de funciones, obedeciendo el producto interno

$$\langle P_p^m(x) | P_q^m(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}. \quad (8.14)$$

Como los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son n-ésimas derivadas de polinomios de grado $2n$ y las funciones asociadas de Legendre son derivadas de grado m de estos polinomios, entonces serán igual a cero para cualquier m que cumpla $m+n > 2n$. Entonces cualquier función P_n^m diferente de cero cumplirá $-n \leq m \leq n$ o $|m| \leq n$. La cota inferior se coloca para que la derivada sea una derivada de orden positivo.

De hecho, se puede mostrar [3] que P_n^m y P_n^{-m} se relacionan de la forma

$$P_n^{-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m \quad (8.15)$$

Armónicos Esféricos

Ya se vió que las funciones asociadas de Legendre son un conjunto completo de funciones ortogonales y que son soluciones de la ecuación asociada de Legendre, la ecuación que salió después de hacer separación de variables en la parte angular de la ecuación de Schrödinger. Obteniendo la solución normalizada de la parte dependiente de ϕ , reemplazando $\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$ en (6.9),

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi^* \Phi = A^2 \int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi} e^{im'\phi} = A^2 2\pi \delta_{mm'}$$

se encuentra el valor de la constante A

$$A = (2\pi)^{-1/2}.$$

Utilizando (8.14), se obtiene la normalización de las funciones asociadas de Legendre. A las soluciones normalizadas para la parte angular de la ecuación de Schrödinger se les llama Armónicos Esféricos,

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}.$$

Se puede utilizar una definición alternativa utilizando (8.15), en donde se definen a las funciones asociadas de Legendre como en la ecuación (6.8) y a los Armónicos Esféricos como en la ecuación (6.10), pero ambas definiciones son equivalentes.

Anexo C

Parte radial de la ecuación de Schrödinger con $V(\mathbf{r})=0$

En la sección 6.1.1 se habla sobre la solución para la parte radial de la ecuación de Schrödinger, en esta sección se analiza a más detalle esta solución. El camino que tomaré para mostrar que las soluciones a la ecuación (8) son las funciones esféricas de Bessel y de Neumann es diferente al tomado para las soluciones de la parte angular. Empezaré escribiendo una definición para las funciones de Bessel de orden l ,

después mostraré que son solución de la ecuación de Bessel, posteriormente escribiré la definición de las funciones de Neumann y mostraré que también son solución de la ecuación de Bessel, posteriormente mostraré que son soluciones independientes. Ya que la ecuación de Bessel es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, al haber encontrado dos soluciones linealmente independientes se habrá obtenido la solución general. Por último, mostraré que, utilizando un cambio de variables, la ecuación (8) se puede reescribir como la ecuación de Bessel, en donde las soluciones en sus variables originales se les conoce como las funciones esféricas de Bessel y de Neumann. Estas funciones, al igual que los polinomios de Legendre y las funciones asociadas de Legendre, son ortogonales y completas [3].

La ecuación de Bessel tiene la forma

$$x^2 \frac{d^2 Z_v}{dx^2} + x \frac{dZ_v}{dx} + (x^2 - v^2)Z_v = 0$$

con una solución para la ecuación siendo la función de Bessel de orden v

$$J_v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}. \quad (8.16)$$

Para mostrar que es solución, basta con sustituirla junto con sus derivadas en la ecuación de Bessel.

$$\begin{aligned} \frac{dJ_v}{dx} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)}{s!(v+s)!2} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s-1} \\ \frac{d^2 J_v}{dx^2} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)(v+2s-1)}{s!(v+s)!4} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s-2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación de Bessel,

$$\begin{aligned}
& x^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)(v+2s-1)}{s!(v+s)!4} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s-2} + x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)}{s!(v+s)!2} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s-1} + (x^2 - v^2)Z_v = \\
& \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)(v+2s-1)}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + \frac{(-1)^s (v+2s)}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + (x^2 - v^2) \frac{(-1)^s}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} \\
& = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v+2s)^2}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + (x^2 - v^2) \frac{(-1)^s}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} \\
& = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (4sv + 4s^2)}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + x^2 \frac{(-1)^s}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} \\
& = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (4sv + 4s^2)}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{k!(v+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k+2} \\
& \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 4s(v+s)}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)} 4}{(s-1)!(v+s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} \\
& \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 4}{(s-1)!(v+s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 4}{(s-1)!(v+s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} = 0.
\end{aligned}$$

Como es igual a cero para todo x , $J_v(x)$ es una solución para la ecuación de Bessel.

Una segunda solución para la ecuación de Bessel está dada por las funciones de Neumann, definidas como

$$N_v(x) = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$$

en donde

$$J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x)$$

El hecho de que $N_v(x)$ sea escrito en términos de combinaciones lineales de $J_v(x)$ asegura que es una solución de la ecuación de Bessel para el caso de v no un entero. Sin embargo, para v entero, $N_v(x)$ es indeterminado, de hecho, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, por lo que se puede usar l'Hopital para encontrar a qué tiende esta función,

$$\begin{aligned}
N_v(x) &= \frac{(d/dv)[\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)]}{(d/dv) \sin v\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{dJ_v(x)}{dv} - (-1)^v \frac{dJ_{-v}(x)}{dv} \right)
\end{aligned}$$

Para la derivada de $J_{-v}(x)$,

$$J_{-v} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(v+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s} = \sum_{s=v}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-v}$$

$$\frac{dJ_{-v}}{dv} = \sum_{s=v}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{-1}{(s-v)!} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-v} + \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-v} (-1) \frac{d}{dv} \frac{1}{(s-v)!} \right)$$

en donde se observa que $N_v(x)$ contiene términos $\ln(x/2)x^{2s-v}$, estos términos son los que aseguran la independencia lineal entre $J_v(x)$ y $N_v(x)$ [3].

Tanto $J_v(x)$ como $N_v(x)$ son soluciones a la ecuación de Bessel, al ser linealmente independientes, conforman la solución general de la ecuación:

$$y_v(x) = AJ_v(x) + BN_v(x).$$

La ecuación (8) no es la ecuación de Bessel, pero haciendo la sustitución

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}$$

se obtiene

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left((kr)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right) Z = 0$$

la cual, sí es la ecuación de Bessel. Las soluciones son entonces $J_{n+1/2}(x)$ y $N_{n+1/2}(x)$. A las soluciones en sus variables originales, por definición, se les llama funciones esféricas de Bessel y Neumann,

$$j_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{v+1/2}(x),$$

$$n_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{v+1/2}(x).$$

Sustituyendo $v = v + 1/2$ en (8.16) se puede demostrar [3] que $j_v(x)$ y $n_v(x)$ tienen la forma (6.13) y (6.14). Un punto importante a recalcar es que $n_v(x)$ diverge cuando $x \rightarrow 0$ [3], lo cual, para soluciones de la ecuación de Schrödinger, inmediatamente restringe la solución solamente a $j_v(x)$, pues tiene que ser normalizable.

Más adelante será de utilidad utilizar otra forma de expresar a las funciones de

Bessel, específicamente una de sus formas integrales [3],

$$J_v(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}(v - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \int_{-1}^1 e^{ipx} (1 - p^2)^{v-1/2} dp,$$

sustituyendo la definición de $j_v(x)$ (6.13) se tiene que

$$j_v(x) = \frac{1}{2(v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^v \int_{-1}^1 e^{ipx} (1 - p^2)^v dp. \quad (8.17)$$

Antes de proceder, un comentario: en general, los libros de mecánica cuántica suelen estudiar tanto a los armónicos esféricos como a las funciones de Bessel y Neumann al resolver sus respectivas ecuaciones definiendo operadores de creación y aniquilación y resolviéndolas utilizando sus propiedades. En este trabajo opté por ahondar en métodos diferentes, pero todos devuelven soluciones equivalentes.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] *PAMELA, a Payload for Antimatter Exploration and Light-nuclei Astrophysics*. <https://pamela.roma2.infn.it/>. Accessed: 2020-18-06.
- [2] M. Aguilar, J. Alcaraz, J. Allaby, B. Alpat, G. Ambrosi, H. Anderhub, L. Ao, A. Arefiev, P. Azzarello, L. Baldini y et al.: *Cosmic-ray positron fraction measurement from 1 to 30 GeV with AMS-01*. *Physics Letters B*, 646(4):145–154, Mar 2007, ISSN 0370-2693. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2007.01.024>.
- [3] H. J. Arfken, George B. Weber: *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 6^a ed., 2005, ISBN 0-12-088584-0.
- [4] S. W. Barwick, J. J. Beatty, A. Bhattacharyya, C. R. Bower, C. J. Chaput, S. Coutu, G. A. de Nolfo, J. Knapp, D. M. Lowder, S. McKee y et al.: *Measurements of the Cosmic-Ray Positron Fraction from 1 to 50 G[CLC]e[/CLC]V*. *The Astrophysical Journal*, 482(2):L191–L194, Jun 1997, ISSN 0004-637X. <http://dx.doi.org/10.1086/310706>.
- [5] M. Bauer y T. Plehn: *Yet another introduction to dark matter*, 2017.
- [6] R. L. Burden y J. D. Faires: *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 20 Channel Center Street. Boston, MA 02210, 9^a ed., 2011, ISBN 978-0-538-73351-9.
- [7] I. Cholis, D. P. Finkbeiner, L. Goodenough y N. Weiner: *The pameLA positron excess from annihilations into a light boson*. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(12):007–007, Dec 2009, ISSN 1475-7516. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/12/007>.
- [8] L. D. L. y E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics, Non-relativistic theory*. Pergamon Press Ltd, 3^a ed., 1997, ISBN 0-08-020940-8.

- [9] S. M. Faber y J. S. Gallagher: *Masses and Mass-To-Light Ratios of Galaxies*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 17(1):135–187, 1979. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.17.090179.001031>.
- [10] D. J. Griffiths: *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, Inc., 1995, ISBN 0-13-124405-1.
- [11] F. Halzen y A. D. Martin: *Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics*. John Wiley and Sons, 1984.
- [12] M. Lattanzi y J. Silk: *Can the wimp annihilation boost factor be boosted by the sommerfeld enhancement?* Physical Review D, 79(8), Apr 2009, ISSN 1550-2368. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.083523>.
- [13] M. Lisanti: *Lectures on Dark Matter Physics*. New Frontiers in Fields and Strings, Nov 2016. http://dx.doi.org/10.1142/9789813149441_0007.
- [14] S. C. A. Nierop: *The Sommerfeld enhancement*. Bachelor thesis, Groningen U., 2009.
- [15] C. D. Paolo y P. Salucci: *Fundamental properties of the dark and the luminous matter from low surface brightness discs*, 2020.
- [16] S. Profumo: *TeV γ -rays and the largest masses and annihilation cross sections of neutralino dark matter*. Physical Review D, 72(10), Nov 2005, ISSN 1550-2368. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.72.103521>.
- [17] R. Sanders: *Modified Newtonian Dynamics: A Falsification of Cold Dark Matter*. Advances in Astronomy, 2009, Oct. 2009.
- [18] B. Schutz: *A general course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2^a ed., 2009.
- [19] P. D. Serpico: *Possible causes of a rise with energy of the cosmic ray positron fraction*. Physical Review D, 79(2), Jan 2009, ISSN 1550-2368. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.021302>.
- [20] R. Shankar: *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press, New York and London, 2^a ed., 1994, ISBN 0-306-44790-8.

- [21] D. N. Spergel y P. J. Steinhardt: *Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter*. Physical Review Letters, 84(17):3760–3763, Apr 2000, ISSN 1079-7114. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.3760>.
- [22] N. Strobel: *Hertzsprung-Russell Diagram*. <http://www.astronomynotes.com/starprop/s13.htm>. Accessed: 2020-21-06.
- [23] D. Tong: *Quantum field theory*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>, 2007.